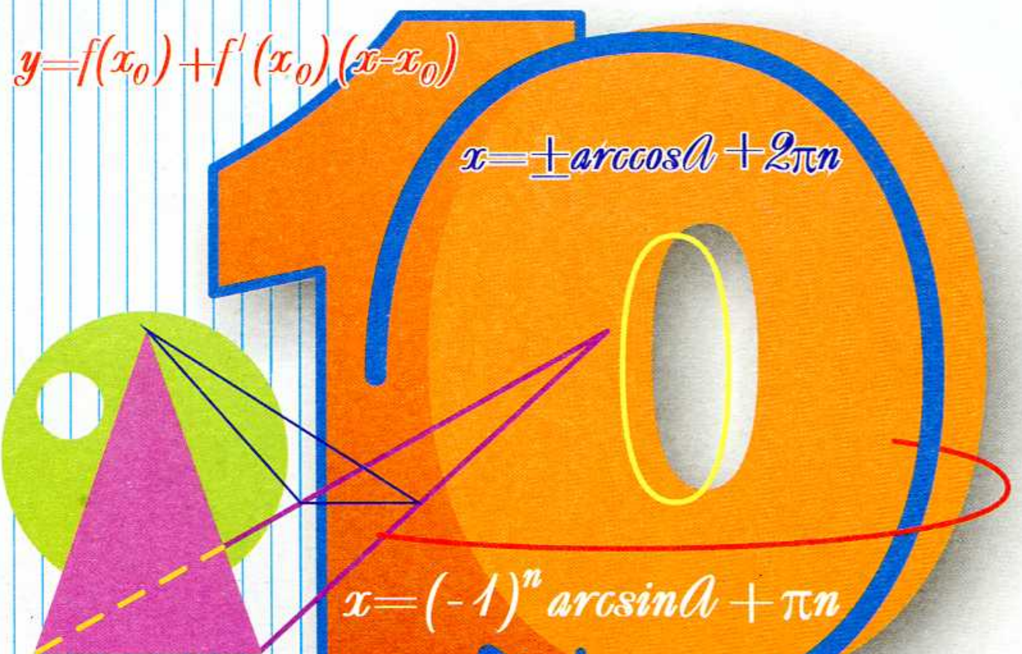
ШКОЛЬНЫЙ КОНСПЕКТ

Ершова А.П.
Голобородько В.В.
Крижановский А.Ф.

$y = \sin x$

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО АЛГЕБРЕ



А.П. Ершова, В.В. Голобородько,
А.Ф. Крижановский

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

(*по учебнику под ред. А.Н. Колмогорова*)

учени____ 10—___ класса

____

____

____

____

Москва
ИЛЕКСА
2014

Рецензенты:

Ю.В. Гандель — доктор физико-математических наук, профессор Харьковского Национального университета им. В.Н.Каразина;

В.А. Лысенко — учитель-методист Авторской школы Бойко, г. Харьков.

Ершова А.П., Голобородько В.В., Крижановский А.Ф.
Тетрадь-конспект по алгебре и началам анализа для 10 класса.— М.: ИЛЕКСА, 2014.— 144 с.
ISBN 978-5-89237-148-3

Тетрадь-конспект содержит все основные теоретические сведения курса алгебры 10 класса (по учебнику под ред. А.Н. Колмогорова). **Типовые задания** описывают простейшие и более сложные ситуации применения изученных понятий и фактов, часто встречающихся в самостоятельных и контрольных работах. **Полезные задания** описывают дополнительные алгебраические факты. Ко всему материалу приводятся схемы решения задач, графики, таблицы и методические рекомендации. В таблицах и типовых заданиях оставлено место для самостоятельного заполнения учащимися. К отдельным задачам приведены решения или указания к решению.

ISBN 978-5-89237-148-3

Дорогие друзья!

Если вы уже купили эту тетрадь-конспект, то у вас наверняка есть свой собственный взгляд на ее эффективное использование. Если же вы раздумываете – покупать или не покупать, пригодится или будет лежать на полке, – то мы можем вкратце, учитывая собственный опыт работы по учебнику под ред. А. Н. Колмогорова с такими тетрадями, рассказать о той несомненной пользе, которую они приносят на практике.

1. В этой тетради **уже проделана вся рутинная работа** по записи определений, формул, условий задач – Вам остается только заполнить необходимые доказательства и решения.
2. Для основных типов упражнений и задач в тетради приводятся **схемы решения**, в которых даются пошаговые указания последовательности действий и преобразований, приводящих к требуемому результату. В каждой схеме предусмотрена колонка примеров, заполнив которую можно создать образец применения схемы в конкретном примере (задаче) с учетом всех тонкостей и математических нюансов, которые могут при этом встретиться.
3. В этой тетради много ***типовых заданий***, то есть заданий, подобные которым часто встречаются на самостоятельных, контрольных и тематических работах. Их решения желательно оформить **как образец** с учетом всех действующих требований – это облегчит подготовку ко всем письменным работам, в том числе и к экзаменам.
4. Для **более глубокого изучения** алгебры предназначены ***полезные задания***, в которых приводятся дополнительные формулы и факты, которые можно получить на основании изученного материала. Эти задания решаются в тетрадях для практических работ. Много интересного дополнительного материала вы найдете и в главе «Приложение».

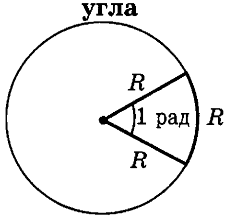
И, наконец, эта тетрадь создавалась, в первую очередь,
для того, чтобы **существенно сэкономить время**
урока и ваше личное время.

Желаем вам успехов!

Будем благодарны за ваши замечания и доброжелательные отзывы,
которые вы можете разместить на нашем сайте www.axiom.com.ua.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

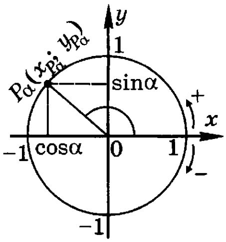
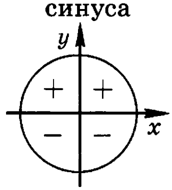
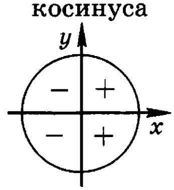
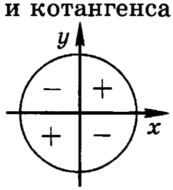
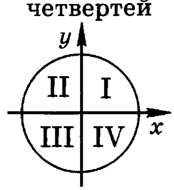
Синус, косинус, тангенс и котангенс (повторение)

Радианная мера угла 	**Углом в 1 радиан** называется центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. Градусная мера угла ($n°$) и радианная мера угла (α рад[1]) связаны соотношением: $$\frac{n^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\alpha}{\pi}.$$
Типовое задание	*Выразите величины углов* *– в радианной мере: а)* 45°; *б)* 270°; *– в градусной мере: в)* $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{8\pi}{5}$. *Решение.*

Определение и свойства тригонометрических функций	Формулы[2] и свойства	Примеры применения
I. Определение тригонометрических функций	$\sin\alpha = y_{P_\alpha}$ $\cos\alpha = x_{P_\alpha}$	*Существуют ли числа* α, β, γ, *для которых* $\sin\alpha = 0{,}05$, $\cos\beta = -\sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = -2005$?

[1] В дальнейшем сокращение «рад» будем опускать.

[2] Во всех формулах, приведенных в этом разделе, следует учитывать ОДЗ левой и правой частей формул.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_{P_\alpha}}{x_{P_\alpha}}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_{P_\alpha}}{y_{P_\alpha}}$$</td>
<td>Решение.</td>
</tr>
<tr>
<td>II. Знаки тригонометрических функций</td>
<td>Знаки синуса

Знаки косинуса

Знаки тангенса и котангенса

Номера четвертей
</td>
<td>Сравните с нулем значение выражения $\dfrac{\sin 150^\circ \cdot \cos(-20^\circ)}{\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{5}}$.
Решение.</td>
</tr>
<tr>
<td>III. Четность-нечетность</td>
<td>$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ − нечетная
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ − четная
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ − нечетная
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ − нечетная</td>
<td>Упростите выражение
$\dfrac{\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\operatorname{tg}(-\alpha)}$.
Решение.</td>
</tr>
</table>

IV. Периодичность

$$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \pi n) = \mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \pi n) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$
$$n \in \boldsymbol{Z}$$

Вычислите:

а) $\cos\dfrac{17\pi}{4}$; *б)* $\mathrm{tg}(-210°)$.

Решение.

V. Значения тригонометрических функций некоторых углов

$n°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

VI. Основные тригонометрические тождества

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

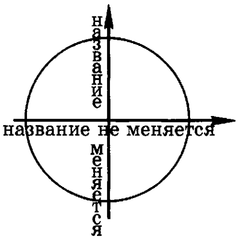
4) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

5) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

6) $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Найдите значения косинуса, синуса и котангенса угла α, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение.

VII. Формулы приведения 	$f_{триг}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)=$ $=\begin{cases}\pm f_{триг}\alpha, & n-\textit{четное},\\ \pm cof_{триг}\alpha, & n-\textit{нечетное}.\end{cases}$ **Перед приведенной функцией[1] ставится тот знак, который имеет исходная функция в той координатной четверти, к которой относится угол $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$, если считать α «маленьким» углом (углом первой четверти).**	*Упростите выражения:* *а)* $\cos(\pi+\alpha)$; *б)* $\text{tg}(270^\circ-\alpha)$. *Решение.*
VIII. Формулы сложения	1) $\cos(\alpha-\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 2) $\cos(\alpha+\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 3) $\sin(\alpha-\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 4) $\sin(\alpha+\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 5) $\text{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$ 6) $\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$	*Вычислите* $\text{tg}(\alpha-\beta)$, *если* $\text{ctg}\alpha=2$, $\text{tg}\beta=3$. *Решение.*
IX. Формулы двойного угла	1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ или $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ или $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 3) $\text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$	*Найдите* $\sin2\alpha$ *и* $\cos2\alpha$, *если* $\sin\alpha=0{,}6$; $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. *Решение.*

[1] Если $f_{триг}=\sin$, то $cof_{триг}=\cos$; если $f_{триг}=\text{ctg}$, то $cof_{триг}=\text{tg}$ и т. д.

X. Формулы понижения степени. Формулы половинного угла	1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ 2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ 3) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ или $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 4) $\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$ или $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$	*Упростите выражение* $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. *Решение.* *Найдите* $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{12}$. *Решение.*
XI. Формулы суммы и разности	1) $\sin\alpha+\sin\beta=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 2) $\sin\alpha-\sin\beta=$ $=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ 3) $\cos\alpha+\cos\beta=$ $=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 4) $\cos\alpha-\cos\beta=$ $=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	*Докажите тождество* $\frac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}\,3\alpha$. *Решение.*

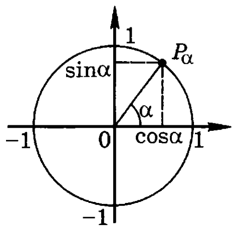
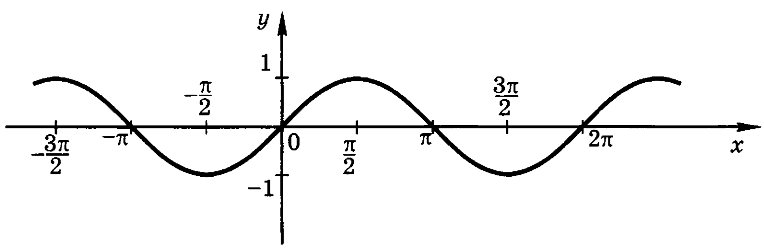
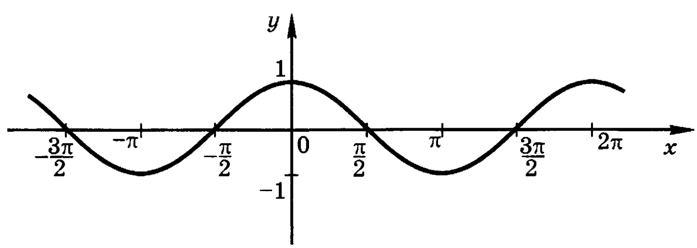
	5) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta}$ 6) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta}$	
XII*[1]. Формулы преобразования произведения в сумму	1) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$ 2) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$ 3) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$	*Вычислите*: $2\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 70^\circ$. *Решение.* *Ответ*: 0,5.
XIII*. Формулы тройного угла	1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ 2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ 3) $\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$ 4) $\operatorname{ctg}3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$	*Докажите тождество* $\dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$. *Решение.*

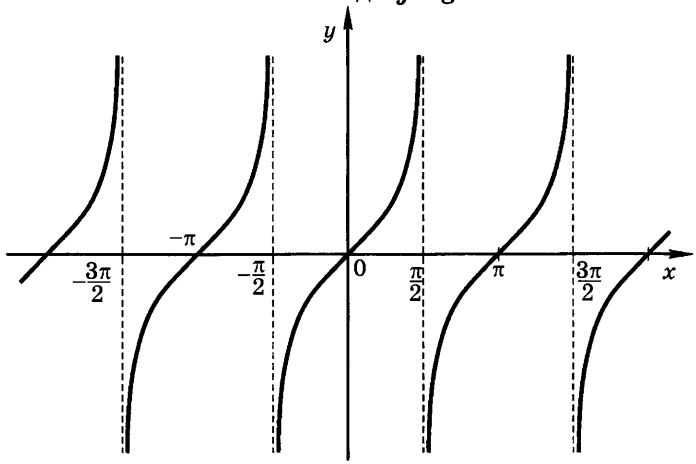
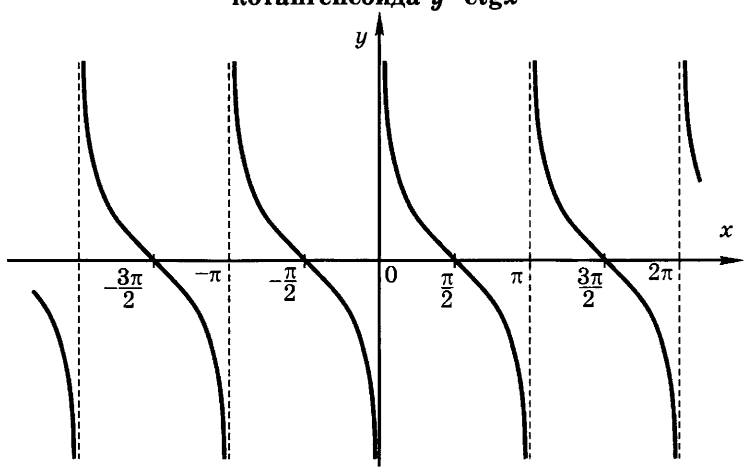
[1] Сведения, помеченные звездочкой, не являются обязательными для изучения.

XIV*. Универсальная тригонометрическая подстановка	1) $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$ 2) $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$ 3) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$ 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$	*Найдите* $\cos 2\alpha$, *если* $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. *Решение.* *Ответ*: **−0,28.**
Типовое задание	*Докажите тождество*: *а*) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$; *б*) $\sin\alpha\sin\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta) = \sin(\alpha+\beta)$. *Решение.*	

Типовое задание	*Упростите выражение*: $$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}.$$ *Решение.* *Ответ*: $\mathrm{tg}\alpha$.
Типовое задание	*Вычислите*: *а*) $\mathrm{tg}15°$; *б*) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=-0{,}8$; $\cos\beta=0{,}8$; $180°<\alpha<270°$; $270°<\beta<360°$. *Решение.* *Ответ*: *а*) $2-\sqrt{3}$; *б*) $-0{,}96$.

Графики тригонометрических функций

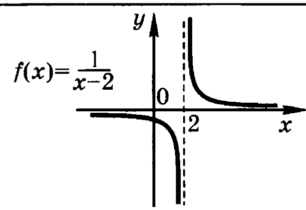
Единичная окружность 	Окружность (круг) радиуса 1 с центром в начале координат называется **единичной (тригонометрической) окружностью (кругом).** Тригонометрической функцией числа x называется тригонометрическая функция угла в x радиан.
Функции синус и косинус	Числовая функция, заданная формулой $y=\sin x$ ($y=\cos x$) называется **синусом (косинусом)**, а ее график – **синусоидой (косинусоидой).**
Свойства функций	**Графики функций**
$D(\sin) = \boldsymbol{R}$ $E(\sin) = [-1; 1]$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\sin(x+2\pi n) =$ $= \sin x,\ n \in \boldsymbol{Z}$	**синусоида $y=\sin x$** 
$D(\cos) = \boldsymbol{R}$ $E(\cos) = [-1; 1]$ $\cos(-x) = \cos x$ $\cos(x+2\pi n) =$ $= \cos x,\ n \in \boldsymbol{Z}$	**косинусоида $y=\cos x$** 
Функции тангенс и котангенс	Числовая функция, заданная формулой $y=\mathrm{tg}\,x$ ($y=\mathrm{ctg}\,x$) называется **тангенсом (котангенсом)**, а ее график – **тангенсоидой (котангенсоидой).**

Свойства функций	Графики функций
$D(\mathrm{tg})$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$ $E(\mathrm{tg}) = \boldsymbol{R}$ $\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}x$ $\mathrm{tg}(x+\pi n) =$ $= \mathrm{tg}x, \ n \in \boldsymbol{Z}$	**тангенсоида $y=\mathrm{tg}x$** 
$D(\mathrm{ctg})$: $x \neq \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$ $E(\mathrm{ctg}) = \boldsymbol{R}$ $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$ $\mathrm{ctg}(x+\pi n) =$ $= \mathrm{ctg}x, \ n \in \boldsymbol{Z}$	**котангенсоида $y=\mathrm{ctg}x$** 
Типовое задание	***Найдите область определения и область значений функции:*** *а)* $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$; *б)* $y=\cos x+2$; *в)* $y=-\mathrm{ctg}x$. ***Решение.***

Полезное задание	*Постройте графики функций* $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ (*секанс*) *и* $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (*косеканс*).

Функции и их графики

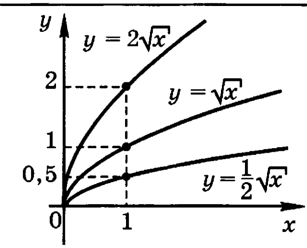
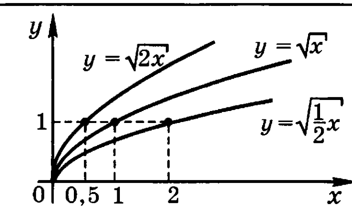
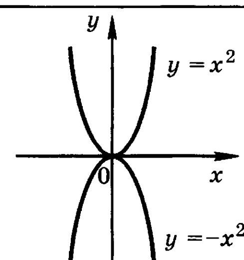
	Определение	**Пример**
Числовая функция ***y=f(x)*** ***x – аргумент*** ***y – значение функции***	**Числовой функцией** с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу единственное число y, зависящее от x.	$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
Область определения функции	**Областью определения** функции $y=f(x)$ называется множество всех значений, которые может принимать аргумент x. Если функция задана формулой и ее область определения не указана, то считается, что область определения функции состоит из всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл.	$D\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$:

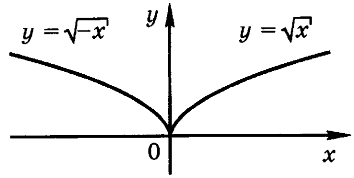
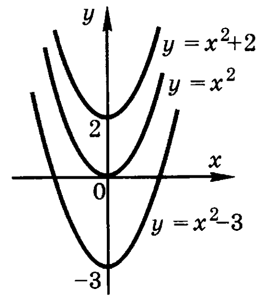
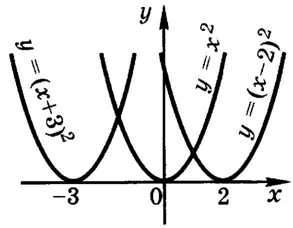
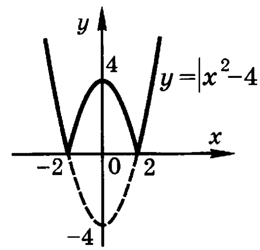
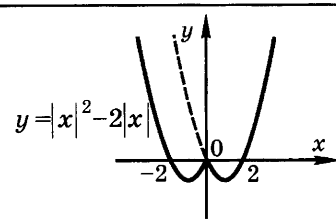
Область значений функции	**Областью значений** функции f называется множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f.	$E\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$:
График функции	**Графиком функции** f называется множество всех точек $(x;\ y)$ координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.	
Особенности нахождения области определения функции[1]	1) знаменатели дробей, входящих в формулу $f(x)$, не должны равняться нулю;	*Найдите область определения функции* $f(x)=\dfrac{x-3}{1-x^2}$. *Решение.*
	2) если формула $f(x)$ содержит корни четных степеней, то подкоренные выражения должны быть неотрицательны (≥ 0);	*Найдите область определения функции* $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$. *Решение.*

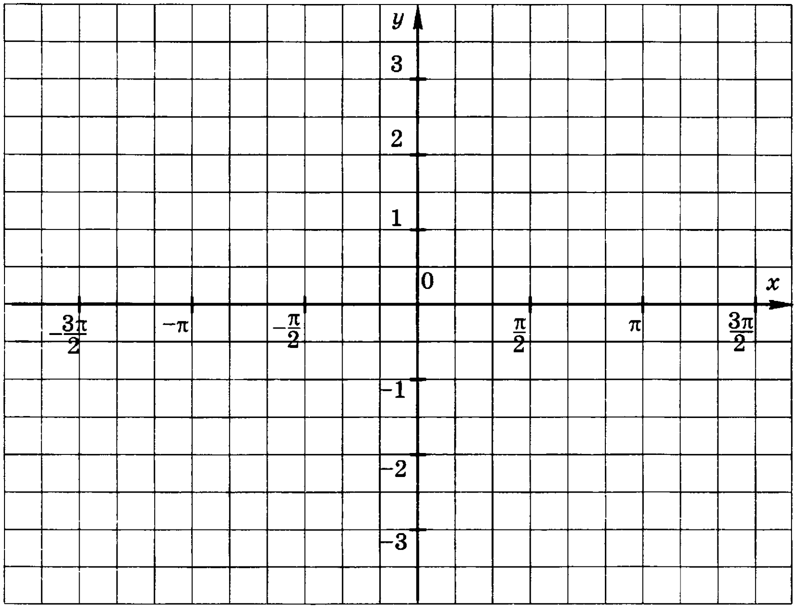
[1] По ходу дальнейшего изучения алгебры список условий будет дополняться.

	3) если формула $y=f(x)$ содержит выражения вида $\mathrm{tg}\alpha$ ($\mathrm{ctg}\alpha$), то для нахождения области определения необходимо проверить выполнение условия $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($\alpha \neq \pi k$), $k \in \boldsymbol{Z}$.	*Найдите область определения функции* $f(x) = \mathrm{ctg}\,2x$. *Решение.*

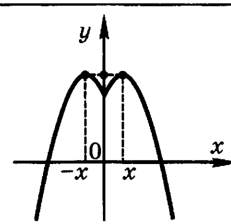
Элементарные преобразования графика функции

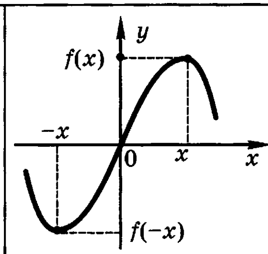
Вид преобразования	Схема построения	Пример
$y=kf(x)$, $k>0$	1. Если $k>1$, растяните график функции $y=f(x)$ от оси Ox в k раз. 2. Если $0<k<1$, сожмите график функции $y=f(x)$ к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.	
$y=f(kx)$, $k>0$	1. Если $k>1$, сожмите график функции $y=f(x)$ к оси Oy в k раз. 2. Если $0<k<1$, растяните график функции $y=f(x)$ от оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз.	
$y=-f(x)$	Отразите график функции $y=f(x)$ симметрично относительно оси Ox.	

$y=f(-x)$	Отразите график функции $y=f(x)$ симметрично относительно оси Oy.	
$y=f(x)+b$	1. Если $b>0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Oy на вектор $\overrightarrow{(0;b)}$, то есть на b единиц вверх. 2. Если $b<0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Oy на вектор $\overrightarrow{(0;b)}$, то есть на $(-b)$ единиц вниз.	
$y=f(x-a)$	1. Если $a>0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Ox на вектор $\overrightarrow{(a;0)}$, то есть на a единиц вправо. 2. Если $a<0$, выполните параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Ox на вектор $\overrightarrow{(a;0)}$, то есть на $(-a)$ единиц влево.	
$*\, y=\lvert f(x)\rvert$	Отразите часть графика функции $y=f(x)$, лежащую ниже оси Ox, симметрично относительно этой оси вверх, а часть графика, лежащую выше оси Ox и на оси Ox, оставьте без изменений.	
$*\, y=f(\lvert x\rvert)$	Часть графика функции $y=f(x)$, лежащую правее оси Oy и на оси Oy, оставьте без изменений, и ее же отразите симметрично относительно этой оси влево, а часть графика, лежащую левее оси Oy, удалите.	

Типовое задание	*Постройте в одной системе координат графики функций:* *а)* $y = \sin x$; *б)* $y = \sin 2x$; *в)* $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; *г)* $y = 1{,}5 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. *Решение.* 

Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций

Четные и нечетные функции	**Определение**	**Свойство графика и особенность его построения**	**Пример графика**
Четная функция	Функция f называется **четной,** если для любого значения x из ее области определения $f(-x) = f(x)$.	График четной функции симметричен относительно оси ординат. Для построения такого графика достаточно построить его часть для неотрицательных x, а затем отразить полученный график симметрично относительно оси ординат.	 $f(-x) = f(x)$

Нечетная функция	Функция f называется **нечетной**, если для любого значения x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$.	График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Для построения такого графика достаточно построить его часть для неотрицательных x, а затем отразить полученный график симметрично относительно начала координат.	 $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

Замечания.

1) Из определения четной и нечетной функций следует, что если некоторое число x входит в область определения такой функции, то в нее входит и противоположное число $-x$, то есть область определения симметрична относительно нуля.

2) Не всякая функция является четной или нечетной.

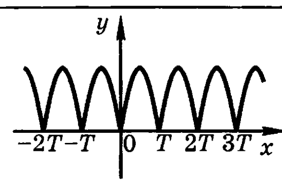
3) Напомним, что функция $\cos x$ является четной, а функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ – нечетными.

Схема исследования функции на четность (нечетность)

Этапы исследования функции $f(x)$	**Примеры**	
	$f(x) = x^3 + \sin 3x$	$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
1. Найдите $D(f)$; если она не симметрична относительно нуля, то функция не является ни четной, ни нечетной.	$D(f)=R$ — симметрична относительно нуля	
2. Выразите $f(-x)$ и попытайтесь привести полученное выражение к виду $f(x)$ или $-f(x)$.	$f(-x) = (-x)^3 + \sin 3(-x) =$ $= -x^3 - \sin 3x =$ $= -(x^3 + \sin 3x)$.	

3. Проверьте выполнение условий $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$.	$f(-x) = -f(x)$.	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: *функция нечетная.*	

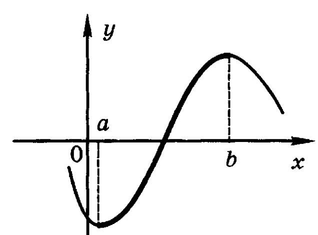
Типовое задание	*Исследуйте данную функцию на четность (нечетность):* *а)* $f(x) = 5x^2 - 4x^6$; *б)* $g(x) = \dfrac{\sin x}{2x^4 + 3x^2 + 1}$; *в)* $k(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$. *Решение.* *Ответ*: *в) ни четная, ни нечетная.*
Полезное задание	*Докажите, что если нечетная функция f определена при $x=0$, то $f(0)=0$.*

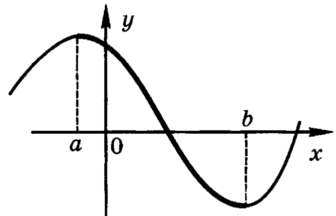
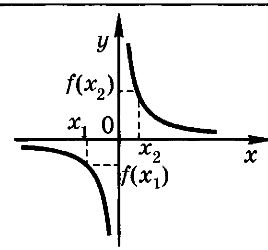
Периодические функции	**Определение**	**Особенность построения графика**	**Пример**
	Функция f называется **периодической** с периодом $T \neq 0$, если для любого значения x из ее об-	Для построения графика периодической функции с периодом $T>0$ достаточно провести построение на от-	

<table>
<tr><td></td><td>ласти определения
$f(x-T) = f(x) =$
$= f(x+T)$.</td><td colspan="2">резке длиной T и затем полученный график параллельно перенести на расстояние nT вправо и влево вдоль оси Ox ($n \in N$).</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Замечания.
1) Если T – период функции f, то при любом целом $n \neq 0$ nT – также период этой функции.
2) Как правило, говоря о периоде функции, имеют в виду ее наименьший положительный период.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Наименьшие положительные периоды тригонометрических функций</td><td>Функция</td><td>$\sin x$</td><td>$\cos x$</td><td>$\mathrm{tg}\, x$</td><td>$\mathrm{ctg}\, x$</td></tr>
<tr><td>Период</td><td>2π</td><td>2π</td><td>π</td><td>π</td></tr>
<tr><td>Функция</td><td>$\sin(kx+b)$</td><td>$\cos(kx+b)$</td><td>$\mathrm{tg}(kx+b)$</td><td>$\mathrm{ctg}(kx+b)$</td></tr>
<tr><td>Период</td><td>$\frac{2\pi}{|k|}$</td><td>$\frac{2\pi}{|k|}$</td><td>$\frac{\pi}{|k|}$</td><td>$\frac{\pi}{|k|}$</td></tr>
<tr><td>Полезное задание</td><td colspan="5">Если функция f периодическая и имеет период T, то функция $Af(kx+b)$, где A, k и b – некоторые числа (A, $k \neq 0$) имеет период $\frac{T}{|k|}$. Докажите.</td></tr>
<tr><td>Типовое задание</td><td colspan="5">Постройте график функции $y = \sin 2x$, используя ее периодичность.
Решение.</td></tr>
</table>

Типовое задание	*Найдите наименьший положительный период каждой из функций:* *а)* $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{3} - 1$; *б)* $y = \cos x \sin 5x - \sin x \cos 5x$; *в)* $y = 2\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 - 1$. *Решение.*
Полезное задание	*Докажите, что функция Дирихле* $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & x \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$ *является периодической, но не имеет наименьшего положительного периода.*

Возрастание и убывание функций. Экстремумы

Возрастание и убывание функций	**Определение и обозначение**	**Графическая иллюстрация**
Возрастающая функция	Функция f **возрастает** на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2 > x_1$, верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Иными словами, функция называется **возрастающей** на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции.	 $f(x)$ возрастает на $[a; b]$

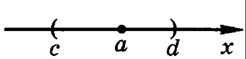
	Обозначение. Возрастание функции $f(x)$ на множестве P иногда обозначается так: $f(x)\uparrow P$.	
Убывающая функция	Функция f **убывает** на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, верно неравенство $f(x_2)<f(x_1)$. Иными словами, функция называется **убывающей** на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции. ***Обозначение.*** Убывание функции $f(x)$ на множестве P иногда обозначается так: $f(x)\downarrow P$.	 $f(x)$ убывает на $[a;\ b]$
Замечания. 1) Возрастание и убывание иначе называют **монотонностью** функции. 2) При исследовании функций на монотонность принято указывать максимальные промежутки возрастания и убывания, включая концы (если они входят в эти промежутки). 3) Промежутки монотонности обычно перечисляются через точку с запятой, поскольку функция может возрастать (убывать) на каждом из промежутков, но не возрастать (убывать) на их объединении. Так функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ убывает на каждом из интервалов $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, но не убывает на их объединении.		 $f(x)$ убывает на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. При этом найдутся такие $x_1<x_2$, что $f(x_1)<f(x_2)$, поэтому $f(x)$ не убывает на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
Типовое задание	*Исследуйте функции на монотонность*: *а)* $f(x)=x^2-4x+3$; *б)* $f(x)=(x-1)^3$. *Решение.*	

Полезное задание	*1) Если четная функция возрастает на промежутке* $[a;b]$, $0<a<b$, *то она убывает на промежутке* $[-b;-a]$. *Докажите.* *2) Если нечетная функция возрастает на промежутке* $[a;b]$, $0<a<b$, *то она возрастает и на промежутке* $[-b;-a]$. *Докажите.* *3) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для функции, убывающей на промежутке* $[a;b]$, $0<a<b$.			
Полезное задание	*Докажите, что если функция возрастает на промежутках* $[a;b]$ *и* $[b;c]$, *то она возрастает и на промежутке* $[a;c]$.			
Возрастание и убывание тригонометрических функций	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Промежутки возрастания ($n \in \boldsymbol{Z}$)	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	–
Промежутки убывания ($n \in \boldsymbol{Z}$)	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$	–	$(\pi n;\ \pi + \pi n)$

Типовое задание	*Найдите промежутки возрастания и убывания функции:* *а)* $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; *б)* $f(x)=\text{tg}\,\frac{x}{2}$. *Решение.*

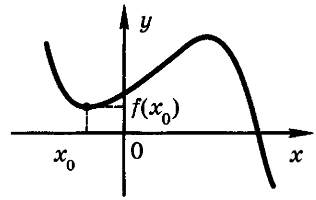
Схема сравнения значений тригонометрических функций при различных значениях аргумента

Этапы решения	Примеры	
	Сравните числа $\cos(-70°)$, $\cos 186°$ *и* $\sin 84°$.	*Сравните числа* $\text{tg}\,\frac{2\pi}{7}$, $\text{ctg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ *и* $\text{tg}\,\frac{29\pi}{7}$.
1. Если сравниваются значения функции и кофункции, то с помощью формул приведения сделайте все функции в данных выражениях одинаковыми.	$\sin 84° = \sin(90°-6°) = \cos 6°$	
2. Используя четность (нечетность), периодичность и формулы приведения, сведите все аргументы на промежуток монотонности данной	$\cos(-70°) = \cos 70°$, $70° \in [0°;\ 180°]$; $\cos 186° = \cos(360°-186°) =$ $= \cos 174°$, $174° \in [0°;\ 180°]$; $6° \in [0°;\ 180°]$.	

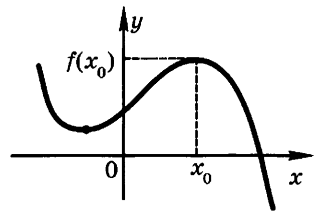
функции, не меняя ее названия. Обычно используют такие промежутки: $\sin x \uparrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \downarrow [0;\pi]$; $\operatorname{tg} x \uparrow \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{ctg} x \downarrow (0;\pi)$.		
4. Используя возрастание (убывание) тригонометрической функции, сравните данные числа и запишите ответ.	Т.к. $6°<70°<174°$ и косинус убывает на $\left[0;180°\right]$, то $\cos 6°>\cos 70°>\cos 174°$. *Ответ*: $\cos 186°<\cos(-70°)<\sin 84°$.	*Ответ*:
Типовое задание	*Расположите в порядке возрастания числа*: $\cos 1{,}5$; $\cos(-1{,}3)$; $\cos\frac{3\pi}{2}$; $\cos\frac{6\pi}{5}$; $\cos(-2)$. *Решение.*	
Определение окрестности точки 	**Окрестностью точки** (числа) *a* называется любой интервал, содержащий эту точку.	

<table>
<tr><th>Точки экстремума и экстремумы функции</th><th>Определение и обозначение</th><th>Графическая иллюстрация</th></tr>
<tr><td>Точка минимума и минимум</td><td>Точка x_0 называется точкой минимума функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Значение функции в точке минимума называется минимумом функции.

Обозначение. Точка минимума функции $y=f(x)$ часто обозначается $x_{\min}$, а минимум функции – $y_{\min}$.</td><td>
$x_{\min} = x_0$,
$y_{\min} = f(x_0)$</td></tr>
<tr><td>Точка максимума и максимум</td><td>Точка x_0 называется точкой максимума функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума называется максимумом функции.

Обозначение. Точка максимума функции $y=f(x)$ часто обозначается $x_{\max}$, а максимум функции – $y_{\max}$.</td><td>
$x_{\max} = x_0$,
$y_{\max} = f(x_0)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Замечание.
Точки минимума и максимума иначе называют точками экстремума, а минимумы и максимумы – экстремумами функции.
Функция может иметь один, несколько или бесконечно много экстремумов или не иметь экстремумов вообще.</td></tr>
<tr><td>Типовое задание</td><td colspan="2">Найдите точки экстремума и экстремумы функции:
а) $f(x) = 2(x-1)^6 - 3$; б) $f(x) = 2\sin x + 1$;
в) $f(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.</td></tr>
</table>

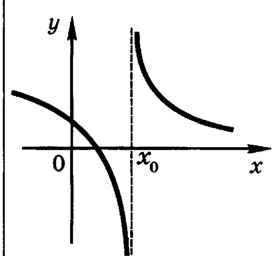
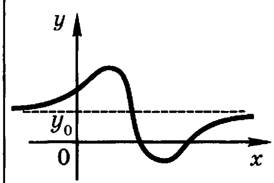
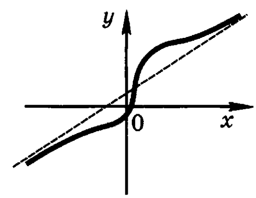
	Решение.
Полезное задание	*Доказите, что:* 1) *если* x_0 *– точка максимума четной функции* f, *то* $-x_0$ *– также точка максимума этой функции;* 2) *если* x_0 *– точка максимума нечетной функции* f, *то* $-x_0$ *– точка минимума этой функции.* *Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения, если* x_0 *– точка минимума.*
Полезное задание	*Докажите, что:* 1) *если функция возрастает на* $[a;b]$ *и убывает на* $[b;c]$, *то* b *– точка максимума;* 2) *если функция убывает на* $[a;b]$ *и возрастает на* $[b;c]$, *то* b *– точка минимума.*

Исследование функций

Нули функции и промежутки знакопостоянства	**Нулями функции** $y=f(x)$ **называются корни уравнения** $f(x)=0$.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Нули функции – абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс.

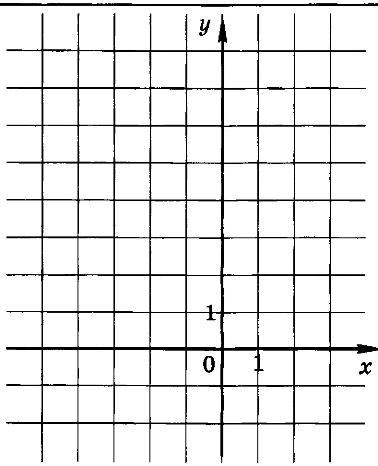
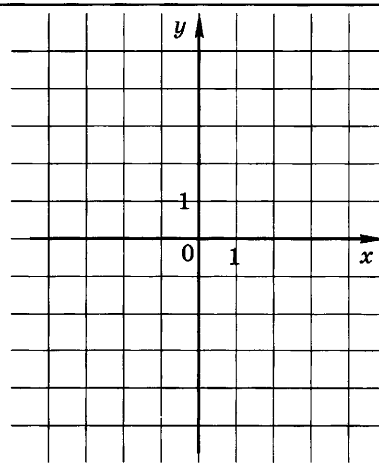
Промежутки знакопостоянства функции – промежутки, на которых функция сохраняет знак, то есть принимает только положительные (отрицательные) значения.

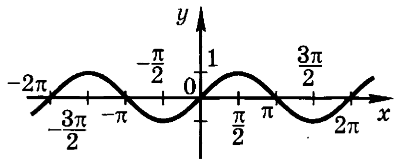
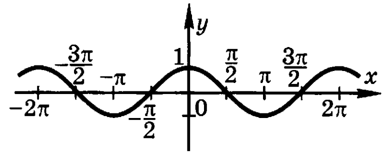
Промежутки знакопостоянства – промежутки оси абсцисс, соответствующие частям графика, расположенным над осью абсцисс $\left(f(x) > 0\right)$ и под осью абсцисс $\left(f(x) < 0\right)$.</td></tr>
<tr><td>Асимптоты</td><td colspan="3">Асимптотой[1] называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виды асимптот</td><td>Вертикальные</td><td>Горизонтальные</td><td>Наклонные</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Типовое задание</td><td colspan="3">Назовите вертикальные асимптоты графиков функций:
а) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$; б) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; в) $f(x) = -\operatorname{ctg} x$.

Решение.</td></tr>
</table>

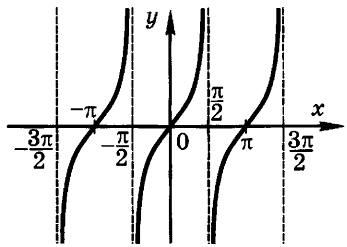
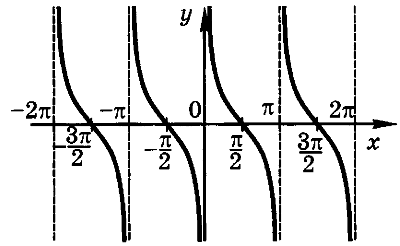
[1] Более подробные исследования асимптот связаны с понятием предела функции и приводятся в приложении.

Схема исследования функции		
Этапы исследования	**Примеры**	
	$f(x) = \sqrt{x+5} - 1$	$f(x) = \dfrac{6}{x+1}$
1. Найдите **область определения** и **область значений** данной функции.		
2. Исследуйте функцию на **четность (нечетность)** и **периодичность.**		
3. Вычислите **координаты точек пересечения графика с осями координат.**		
4. Найдите **промежутки знакопостоянства функции.**		

5. Определите **промежутки монотонности (возрастания и убывания) функции.**		
6. Найдите **точки экстремума и экстремумы функции** и определите их вид (максимум или минимум).		
7. Исследуйте **поведение функции в окрестности характерных точек,** не входящих в область определения, **и при больших (по модулю) значениях аргумента.**		
График функции		
Замечание. Некоторые этапы исследования при необходимости можно опускать.		

Свойства тригонометрических функций		
Этапы исследования	$y = \sin x$	$y = \cos x$
		
1. Область определения и область значений.	$D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [-1;1]$	$D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [-1;1]$
2. Четность (нечетность), периодичность.	$y = \sin x$ — нечетная функция; график симметричен относительно начала координат; наименьший положительный период 2π.	$y = \cos x$ — четная функция; график симметричен относительно оси ординат; наименьший положительный период 2π.
3. Точки пересечения графика с осями координат.	Нули функции: $\sin x = 0$; $x = \pi n$.[1] Точки пересечения графика с осью Ox: $(\pi n; 0)$. Точка пересечения графика с осью Oy: $(0;0)$.	Нули функции: $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.[1] Точки пересечения графика с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$. Точка пересечения графика с осью Oy: $(0;1)$.
4. Промежутки знакопостоянства.	$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$; $\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$.	$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$.
5. Промежутки монотонности.	Возр. на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$; убыв. на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$.	Возр. на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$; убыв. на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$.
6. Точки экстремума и экстремумы.	$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y_{\min} = -1$; $x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y_{\max} = 1$.	$x_{\min} = \pi + 2\pi n$, $y_{\min} = -1$; $x_{\max} = 2\pi n$, $y_{\max} = 1$.

[1] Здесь и далее $n \in \mathbf{Z}$.

Этапы исследования	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
		
1. Область определения и область значений.	$D(y)\colon\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, [1] $E(y)=\boldsymbol{R}$	$D(y)\colon\ x \in (\pi n; \pi+\pi n)$; [1] $E(y)=\boldsymbol{R}$
2. Четность (нечетность), периодичность.	$y = \operatorname{tg} x$ − нечетная функция; график симметричен относительно начала координат; наименьший положительный период π.	$y = \operatorname{ctg} x$ − нечетная функция; график симметричен относительно начала координат; наименьший положительный период π.
3. Точки пересечения графика с осями координат.	Точки пересечения графика с осью Ox: $(\pi n; 0)$. Точка пересечения графика с осью Oy: $(0;0)$.	Точки пересечения графика с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; 0\right)$. С осью Oy график не пересекается.
4. Промежутки знакопостоянства.	$\operatorname{tg} x>0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; $\operatorname{tg} x<0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right)$.	$\operatorname{ctg} x>0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; $\operatorname{ctg} x<0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right)$.
5. Промежутки монотонности.	Возр. на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.	Убыв. на $(\pi n; \pi+\pi n)$.
6. Точки экстремума и экстремумы.	Точек экстремума и экстремумов нет.	Точек экстремума и экстремумов нет.
7. Асимптоты.	Прямые $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$ − вертикальные асимптоты.	Прямые $x = \pi n$ − вертикальные асимптоты.

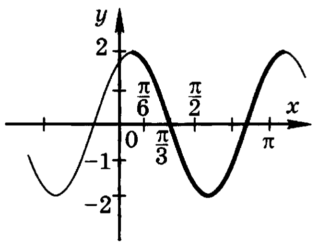
[1] Здесь и далее $n \in \boldsymbol{Z}$.

Схема исследования функций вида $y = A\sin(kx+b)$, $y = A\cos(kx+b)$, $y = A\,\mathrm{tg}(kx+b)$, $y = A\,\mathrm{ctg}(kx+b)$.		
Этапы исследования	**Примеры**	
	$f(x) = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	$f(x) = -0{,}5\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$
1. Область определения и область значений.	$D(f) = \mathbf{R}$; $E(f)$: $-1 \le \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \le 1$, $-2 \le 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \le 2$. $E(f) = [-2;2]$.	
2. Четность (нечетность), периодичность.	$f(-x) = 2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right) =$ $= -2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. $f(-x) \ne f(x)$, $f(-x) \ne -f(x)$ – функция не является ни четной, ни нечетной. Период функции $T_f = \frac{T_{\sin x}}{\lvert k\rvert} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.	
3. Точки пересечения графика с осями координат.	Нули функции: $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$, $2x+\frac{\pi}{3} = \pi n$, $2x = -\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.	

	Точки пересечения графика с осью Ox: $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2};0\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Точка пересечения графика с осью Oy (x=0): $f(0)=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$; $\left(0;\sqrt{3}\right)$.	
4. Промежутки знакопостоянства.	$2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)>0$, $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)>0$, $2\pi n<2x+\dfrac{\pi}{3}<\pi+2\pi n$, $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n<x<\dfrac{\pi}{3}+\pi n$; $f(x)>0$ при $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\dfrac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)<0$, $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)<0$, $-\pi+2\pi n<2x+\dfrac{\pi}{3}<2\pi n$, $-\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n<2x<-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $-\dfrac{2\pi}{3}+\pi n<x<-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$; $f(x)<0$ при $x\in\left(-\dfrac{2\pi}{3}+\pi n;-\dfrac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.	

5. Промежутки монотонности.	Промежутки возрастания: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ возрастает при $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\le 2x\le\frac{\pi}{6}+2\pi n,$ $-\frac{5\pi}{12}+\pi n\le x\le\frac{\pi}{12}+\pi n;$ $f(x)$ возрастает на $\left[-\frac{5\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n\right],\quad n\in\boldsymbol{Z};$ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ убывает при $\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2\pi n,$ $\frac{\pi}{6}+2\pi n\le 2x\le\frac{7\pi}{6}+2\pi n,$ $\frac{\pi}{12}+\pi n\le x\le\frac{7\pi}{12}+\pi n;$ $f(x)$ убывает на $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right],\quad n\in\boldsymbol{Z}.$	
6. Точки экстремума и экстремумы.	Точки минимума: $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $x_{\min}=-\frac{5\pi}{12}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z};$ $y_{\min}=-2;$ точки максимума: $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $x_{\max}=\frac{\pi}{12}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z};$ $y_{\max}=2.$	
7. Асимптоты.	Асимптот нет.	

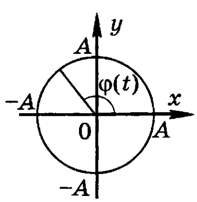
<table>
<tr>
<td>График функции</td>
<td>Сначала строим часть графика на отрезке длины $T = \pi$, например, при $x \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}\right]$ (концы – точки максимума), а затем, используя периодичность, достраиваем его на всей области определения.



</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Типовое задание</td>
<td colspan="2">Исследуйте функцию $y = 2\cos 3x$ и постройте ее график.

Решение.</td>
</tr>
</table>

Гармонические колебания



$x(t) = A\cos\varphi(t)$,

$y(t) = A\sin\varphi(t)$

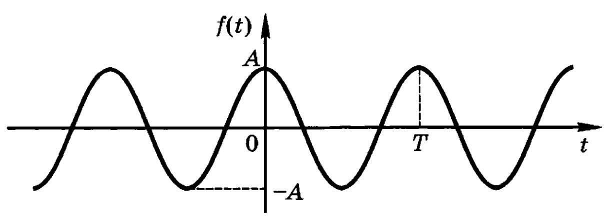
Гармоническими колебаниями называется процесс, который может быть описан функцией вида $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ или $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A>0$, $\omega>0$.

A – *амплитуда* колебаний;

ω – циклическая (круговая) *частота*;

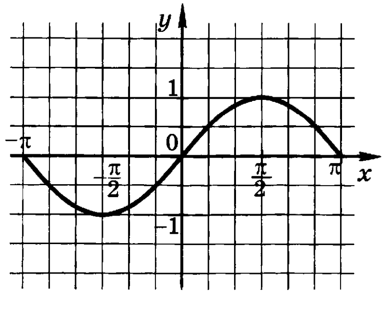
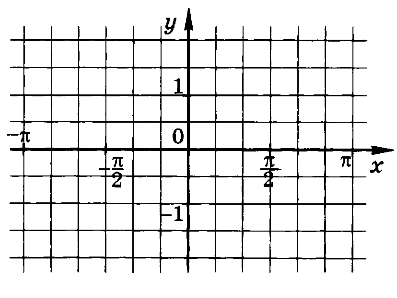
φ – начальная *фаза* колебаний $\left(\varphi \in [0;2\pi)\right)$;

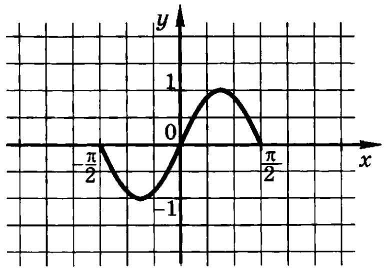
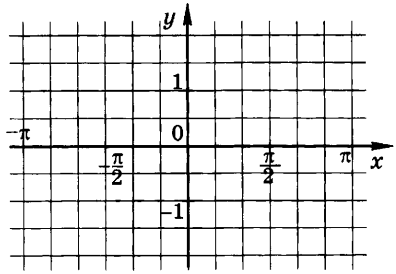
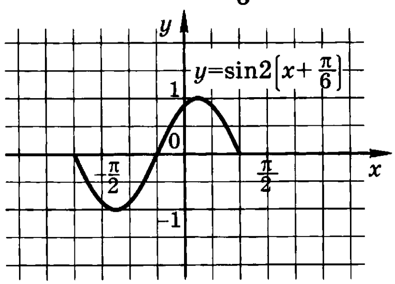
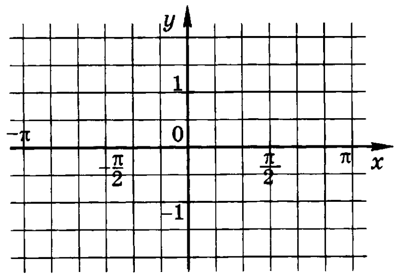
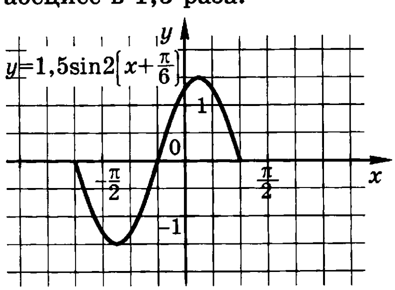
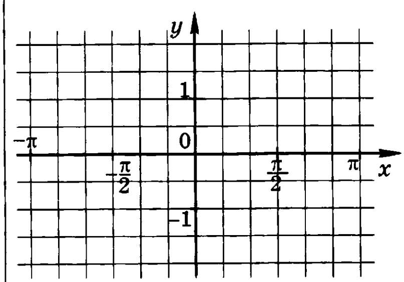
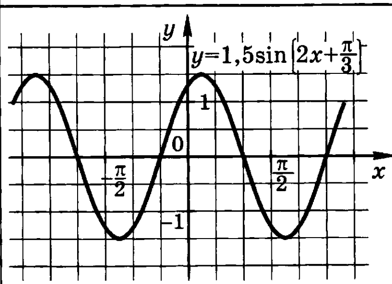
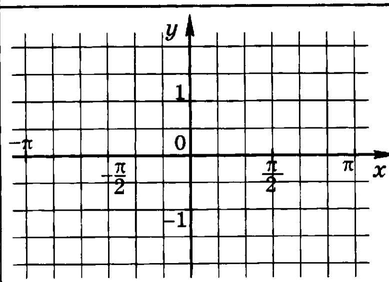
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ – *период* колебаний.



Типовое задание	***Найдите амплитуду, период и частоту напряжения, если оно измеряется по закону $U(t) = 220\sin 60t$ (напряжение измеряется в вольтах, время – в секундах).*** *Решение.*

Построение графика гармонических колебаний с помощью элементарных преобразований графиков

Описание построений	**Этапы построения для функции** $y = 1,5\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$	**Пример** $y = -\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right)$
1. Приведите формулу гармонических колебаний к виду $A\sin\omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ или $A\cos\omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$, где $\omega>0$.	$y = 1,5\sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	
2. Постройте график «основной» функции ($\sin x$ или $\cos x$) на любом промежутке длины 2π (обычно выбирают промежуток $[-\pi;\pi]$).	Строим график $y = \sin x$ на $[-\pi;\pi]$.  	

3. Сожмите или растяните график к (от) оси ординат в зависимости от значения ω.	Сжимаем график к оси ординат в 2 раза. 	
4. Перенесите график вдоль оси абсцисс вправо или влево в зависимости от значения $\frac{\varphi}{\omega}$.	Переносим график вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{6}$. 	
5. Растяните или сожмите график от (к) оси абсцисс в зависимости от значения $\lvert A\rvert$ и, если $A<0$, отразите его симметрично относительно оси абсцисс.	Растягиваем график от оси абсцисс в 1,5 раза. 	
6. Используя периодичность данной функции, достройте искомый график на всей числовой оси.		

Замечания.

1) При построении графиков гармонических колебаний в тетради удобно выбирать масштаб: для оси абсцисс π – 6 клеток, для оси ординат единичный отрезок – 2 клетки.

2) Построение графиков функций $y = A\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ выполняется аналогично с учетом периода тангенса и котангенса, равного π. В качестве фрагмента графика «основной» функции выбирается одна «ветвь» графика тангенса (котангенса).

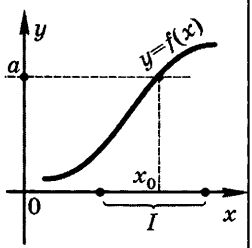
Типовое задание	*Запишите этапы построения графика функции* $y = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) - 1$. *Решение.*
Полезная задача	*Запишите этапы построения графика функции* $y = \lvert A\sin(\omega t + \varphi) + B\rvert$. *Постройте график функции* $y = \left\lvert 3\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) - 4\right\rvert + 1$.

Дополнительные сведения и задачи по теме

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Арксинус, арккосинус и арктангенс

Теорема (о корне)



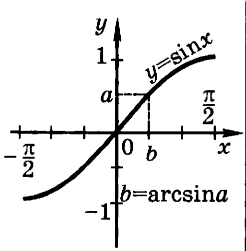
Если функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, а число a – любое из значений, принимаемых функцией f на этом промежутке, то уравнение $f(x)=a$ имеет в промежутке I единственный корень.

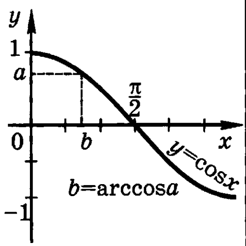
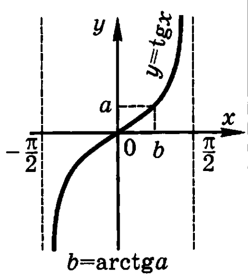
Доказательство.

Полезное задание

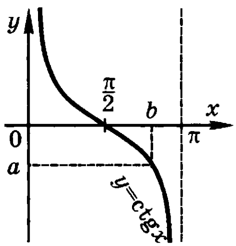
Докажите, что если функция f возрастает на промежутке I, а функция g убывает на этом промежутке, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет в промежутке I не более одного корня.

Решите уравнение $\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[4]{1+x}=3-2x$.

Аркфункция	**Определение и свойства**	**Примеры и доказательства**
Арксинус 	**Арксинусом** числа a называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Очевидно, что $a\in[-1;1]$. ***Обозначение.*** Арксинус числа a обозначается $\arcsin a$.	

	Таким образом, b=arcsin$a$, если: 1) $b \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; 2) sin$b$=$a$. $\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$	
Арккосинус  	**Арккосинусом** числа a называется такое число из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен a. Очевидно, что $a \in [-1;1]$. ***Обозначение.*** Арккосинус числа a обозначается arccos$a$. Таким образом, b=arccos$a$, если: 1) $b \in [0;\pi]$; 2) cos$b$=a. $\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$	
Арктангенс  	**Арктангенсом** числа a называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. ***Обозначение.*** Арктангенс числа a обозначается arctg$a$. Таким образом, b=arctg$a$, если: 1) $b \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; 2) tg$b$=$a$. $\boxed{\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a}$	

Арккотангенс



b=arcctg$a$

Арккотангенсом числа a называется такое число из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен a.

Обозначение. Арккотангенс числа a обозначается arcctg$a$.

Таким образом, b=arcctg$a$, если:

1) $b \in (0;\pi)$;
2) ctg$b$=a.

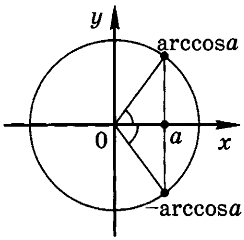
$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$$

Полезное задание	*Верно ли, что* $\operatorname{arctg} a = \dfrac{\arcsin a}{\arccos a}$?
Типовое задание	*Найдите значение выражения:* *а)* $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; *б)* $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg}(-1)$; *в)* $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$. *Решение.*

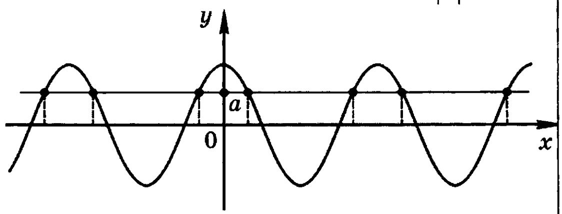
Решение простейших тригонометрических уравнений

Вид уравнения	Решение	Примеры

$\cos x = a$



Уравнение имеет решения, если $|a| \le 1$.



Формула решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n, \\ x = -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. \text{ или}$$

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

Частные случаи

$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

Если $|a| > 1$, то уравнение не имеет решений.

Примеры:

$\cos x = \frac{1}{2}$

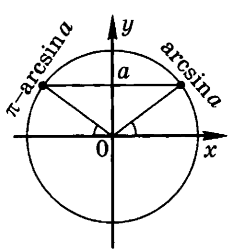
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = 0,3$

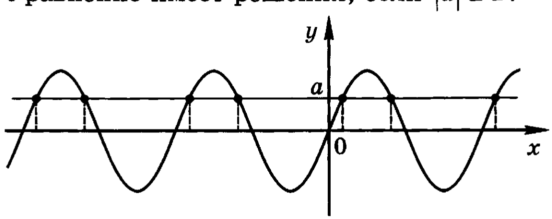
$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x = \sqrt{3}$

$\sin x = a$



Уравнение имеет решения, если $|a| \le 1$.



Формула решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in Z \text{ или}$$

Примеры:

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = -0,4$

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}}$$

Частные случаи

$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Если $|a| > 1$, то уравнение не имеет решений.

$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}5x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \frac{\pi}{2}$

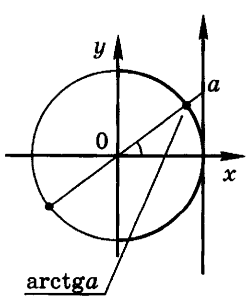
Замечания.

1) При $n=2k$ из формулы $(-1)^n \arcsin a + \pi n$ получается формула $\arcsin a + 2\pi k$, а при $n=2k+1$ – формула $\pi - \arcsin a + 2\pi k$.

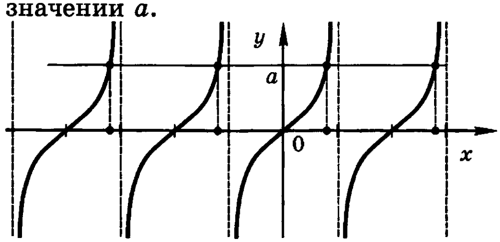
2) В записи ответа уравнений вида $\sin x = a$ при отрицательном a принято «вносить» знак «минус» при арксинусе в показатель степени числа -1. Например, ответ $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$ принято записывать в виде $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$.

3) В тригонометрических уравнениях с линейным аргументом удобно перед использованием формулы решений привести аргумент к виду $kx + b$, где $k>0$. Например, уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}5x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ удобно привести к виду $\sin\left(0{,}5x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\operatorname{tg} x = a$



Уравнение имеет решения при любом значении a.



Формула решений:

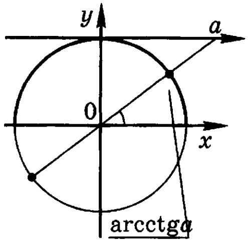
$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}}$$

$\operatorname{tg} x = 1$

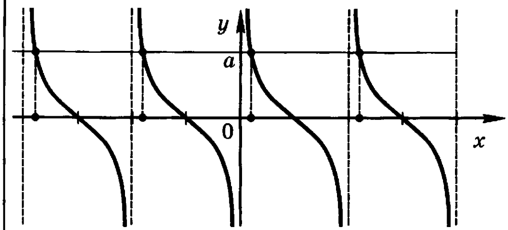
$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \sqrt{3}$

$\mathrm{ctg}\, x = a$



Уравнение имеет решения при любом значении a.



Формула решений:

$$\boxed{x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}}$$

$\mathrm{ctg}\, x = 1$

$\mathrm{ctg}\, x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) = \sqrt{3}$

Замечание. Тригонометрические уравнения вида $\mathrm{ctg}\, x = a$ при $a \neq 0$ иногда сводят к уравнениям вида $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{a}$ с помощью тождества $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1$. Например, уравнение $\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ равносильно уравнению $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$.

Типовое задание

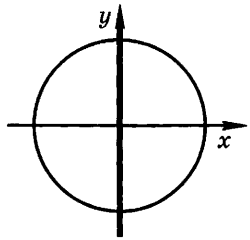
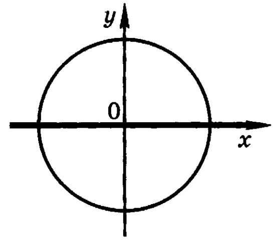
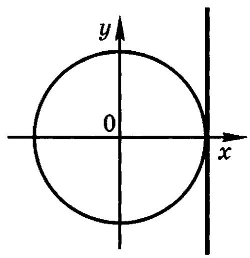
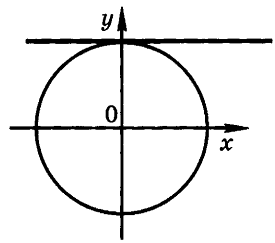
Решите уравнение:

а) $2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; *б*) $-2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$;

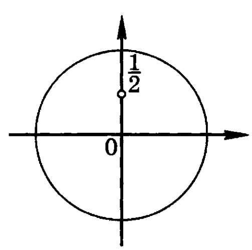
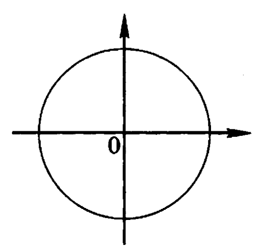
в) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = -1$; *г*) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - 4x\right) = \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4}$.

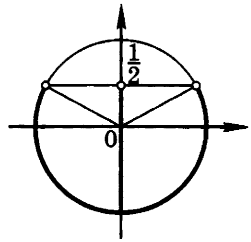
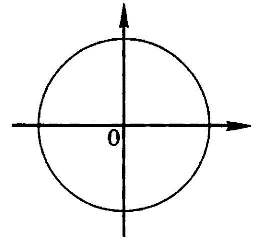
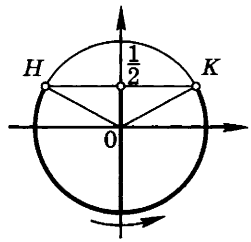
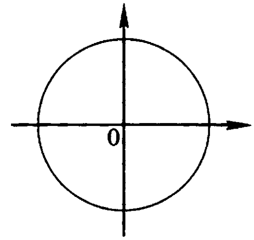
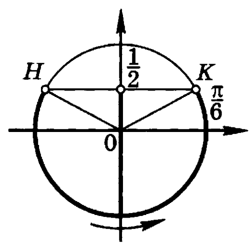
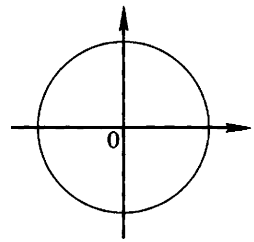
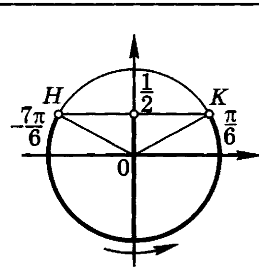
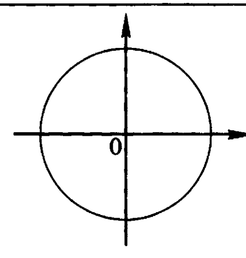
Решение.

Решение простейших тригонометрических неравенств

Оси тригонометрических функций	Линия синусов	Линия косинусов
		
	Линия тангенсов	Линия котангенсов
		

Решение простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\cos x > a$ $(\geq a, < a, \leq a)$ при $|a| < 1$

Этапы решения	Примеры	
	$\sin x < \frac{1}{2}$	$\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
1. Начертите единичную окружность и отметьте число *a* на оси *Ox* (для неравенств с косинусом) или *Oy* (для неравенств с синусом) выколотой точкой для строгих неравенств или жирной точкой – для нестрогих.		

2. Отметьте часть оси и дугу окружности, соответствующие решениям неравенства.		
3. Определите начало *H* и конец *K* отмеченной дуги; движение от *H* до *K* вдоль отмеченной дуги осуществляется против часовой стрелки.		
4. Отметьте граничный угол, равный $\arcsin a$ $(\arccos a)$, соответствующий точке *H* или *K*.		
5. Найдите второй [1] граничный угол, учитывая, что $H<K$ и $0 < K - H < 2\pi$.		
6. Запишите ответ в виде $H + 2\pi n < x < K + 2\pi n$ (или $H + 2\pi n \le x \le K + 2\pi n$), где $n \in \boldsymbol{Z}$.	$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$	

[1] Способы нахождения второго граничного угла:
1 способ. Если ищем *K*, то *K* = *H* + радианная мера дуги;
если ищем *H*, то *H* = *K* − радианная мера дуги;
2 способ. Найдите любую меру, соответствующую искомому углу, и добавлением (вычитанием) 2π один или несколько раз добейтесь выполнения условия $0 < K-H < 2\pi$.

7. Запишите ответ в виде промежутков.	*Ответ*: $\left(-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.	*Ответ*: $\left[\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

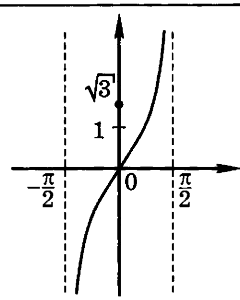
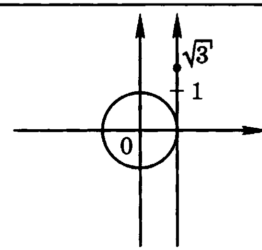
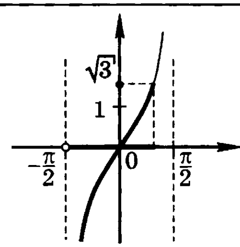
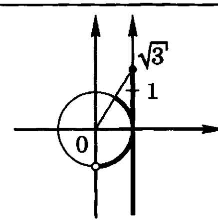
Замечание. Некоторые этапы решения можно проводить устно.

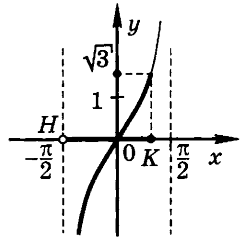
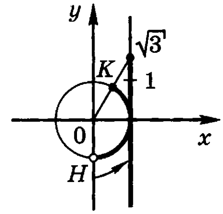
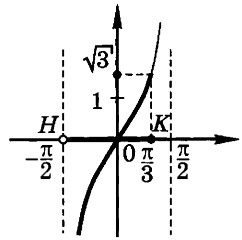
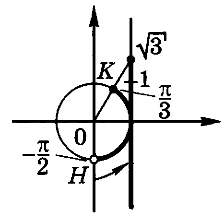
Частные случаи решения неравенств, содержащих синус и косинус ($n \in \boldsymbol{Z}$)

Значения a	$\sin x > a$	$\sin x \geq a$	$\sin x < a$	$\sin x \leq a$
$a > 1$	решений нет	решений нет	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$
$a = 1$	решений нет	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x \in \boldsymbol{R}$
$a = -1$	$x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x \in \boldsymbol{R}$	решений нет	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$
$a < -1$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$	решений нет	решений нет
Значения a	$\cos x > a$	$\cos x \geq a$	$\cos x < a$	$\cos x \leq a$
$a > 1$	решений нет	решений нет	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$
$a = 1$	решений нет	$x = 2\pi n$	$x \neq 2\pi n$	$x \in \boldsymbol{R}$
$a = -1$	$x \neq \pi + 2\pi n$	$x \in \boldsymbol{R}$	решений нет	$x = \pi + 2\pi n$
$a < -1$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$	решений нет	решений нет

Типовое задание	*Решите неравенство*: *а*) $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *б*) $\cos x > \cos\dfrac{\pi}{4}$; *в*) $\sin x < \sqrt{2}$. *Решение.*

Решение простейших тригонометрических неравенств, содержащих тангенс и котангенс

<table>
<tr><th rowspan="2">Этапы решения неравенства
$\operatorname{tg} x > a \ (\geq a, < a, \leq a)$</th><th colspan="2">Пример
$\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$</th></tr>
<tr><th>решение на графике</th><th>решение на окружности</th></tr>
<tr><td>1. Начертите ветвь тангенсоиды при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (или единичную окружность) и отметьте число a на оси Oy (для графика) или на линии тангенсов (для окружности) выколотой точкой для строгих неравенств или жирной точкой – для нестрогих.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Отметьте часть графика (линии тангенсов) и часть оси Ox (дуги полуокружности), соответствующие решениям неравенства.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

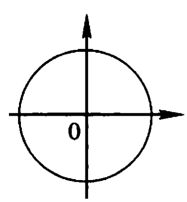
3. Определите начало H и конец K отмеченного промежутка (дуги); движение от H до K вдоль оси Ox осуществляется слева направо (вдоль дуги – против часовой стрелки).		
4. Найдите значения H и K: одно из них равно $\operatorname{arctg} a$, а второе равно $-\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2}$.		
5. Запишите ответ в виде $H+\pi n < x < K+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (для строгих неравенств); в нестрогих неравенствах знак $\le$ ставится **только при арктангенсе.**	$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \le \frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$	
6. Запишите ответ в виде промежутков.	*Ответ*: $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right],\ n \in \boldsymbol{Z}.$	

Замечание.

Решение неравенств вида $\operatorname{ctg} x > a$ $(\ge a, < a, \le a)$ осуществляется аналогично с использованием графика котангенса или окружности.

Типовое задание	*Решите неравенства*: *а*) $\operatorname{tg} x \ge \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; *б*) $\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$. ***Решение.***

Решение тригонометрических неравенств с линейным аргументом

Этапы решения	Примеры	
	$2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3}\right)+\sqrt{3}<0$	$3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\le\sqrt{3}$
1. Используя четность (нечетность) тригонометрических функций, приведите левую часть неравенства к виду $f_{триг}\left(kx+b\right)$, где $k>0$.	$2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)<-\sqrt{3}$; $\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$.	$-3\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Сделайте замену переменной $t=kx+b$ и решите простейшее тригонометрическое неравенство.	Пусть $t=\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}$, тогда $\cos t<-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 	Пусть $t=2x-\frac{\pi}{4}$, тогда $\operatorname{tg} t\ge-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Сделайте обратную замену и оцените значение x.		
4. Запишите ответ в виде промежутков.	*Ответ*: $\left(\frac{7\pi}{2}+6\pi n; \frac{9\pi}{2}+6\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.	*Ответ*: $\left[\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение тригонометрических уравнений[1]

Основные методы решения тригонометрических уравнений	Идея решения: сведение данного уравнения к одному или нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям. Основные методы: • замена переменной; • разложение на множители.

Этапы решения	Примеры	
Уравнения, сводящиеся к алгебраическим относительно одной из тригонометрических функций		
1. Используя основные тригонометрические тождества, представьте данное уравнение как целое или дробно-рациональное относительно одной из тригонометрических функций.	$4-2\sin^2 x-5\cos x=0$ $4-2(1-\cos^2 x)-5\cos x=0;$ $2\cos^2 x-5\cos x+2=0.$	$4\cos^2 x+4\sin x-1=0$
2. Замените тригонометрическую функцию новой переменной и решите полученное алгебраическое уравнение.	Замена: $y=\cos x$. $2y^2-5y+2=0;$ $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}, \\ y=2; \end{array}\right.$	

[1] Описание более сложных методов и особенностей решения тригонометрических уравнений и неравенств, а также методов решения систем тригонометрических уравнений см. в приложении.

3. Сделайте обратную замену и решите простейшие тригонометрические уравнения.	$\left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2},\\ \cos x = 2 - \text{решений нет;}\end{array}\right.$ $x = \pm\arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi n;$ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$	*Ответ*: $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$
Полные однородные[1] уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$, $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ и сводящиеся к ним		
1. Используя формулы тригонометрии, сведите данное уравнение к однородному (часто для этого используют формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x$).	$1 - 4\cos^2 x = \sin 2x$ $\sin^2 x + \cos^2 x - 4\cos^2 x =$ $= 2\sin x\cos x;$ $\sin^2 x - 2\sin x\cos x -$ $- 3\cos^2 x = 0.$	$2\sin 4x = 6\sin^2 2x - 1$
2. Проверьте, что значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями данного уравнения.	Если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$.	
3. Разделите обе части уравнения на $\cos x$ ($\cos^2 x$) и замените $\operatorname{tg} x$ новой переменной[2].	$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0;$ Замена: $y = \operatorname{tg} x$.	
4. Решите полученное уравнение.	$y^2 - 2y - 3 = 0;$ $\left[\begin{array}{l}y = -1,\\ y = 3.\end{array}\right.$	

[1] Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$ и $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ называются **полными однородными тригонометрическими уравнениями** первой и второй степени соответственно.

[2] Иногда в уравнениях такого вида делят на $\sin x$ ($\sin^2 x$) и заменяют новой переменной $\operatorname{ctg} x$.

5. Сделайте обратную замену и решите простейшие тригонометрические уравнения.	$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$	
6. Запишите ответ.	*Ответ*: $-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$	*Ответ*: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$
Уравнения, сводящиеся к виду $f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$		
1. Представьте уравнение в виде равенства нулю произведения нескольких выражений (часто для этого используют вынесение общего множителя за скобки и формулы суммы и разности синусов или косинусов).	$\sin 3x = \sin 5x$ $\sin 5x - \sin 3x = 0;$ $2\sin x \cos 4x = 0;$	$\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$
2. Приравняйте каждый из множителей к нулю и решите полученные уравнения.	$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos 4x = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}. \end{array}\right.$	
3. Запишите ответ, объединив в нем все найденные решения.	*Ответ*: $\pi n;\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}.$	*Ответ*: $\frac{\pi n}{4};\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$
Замечание. Если для записи ответа тригонометрического уравнения используется несколько формул, то целочисленные переменные, входящие в них, иногда обозначают разными буквами. Например, ответ может иметь вид: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ 2\pi k,\ n, k \in Z$. Обозначение целочисленных переменных разными буквами играет особую роль при отборе корней уравнения и решении тригонометрических систем (об этом см. приложение).		
Типовое задание	*Решите уравнение*: *а*) $2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; *б*) $2\sin x = 3\cos x$; *в*) $\cos 6x + 2\cos 2x = 0$; *г*) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$.	

Решение.

Указание. в) Представьте 2cos2x *как* cos2x+cos2x.

Ответ: *а)* $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}1,5+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; *б)* $\operatorname{arctg}1,5+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$;

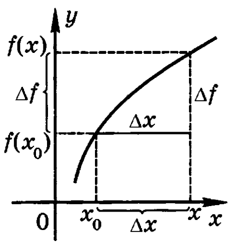
в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; *г)* $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Дополнительные сведения и задачи по теме

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Приращение функции

Приращение аргумента и приращение функции



Приращением аргумента (приращением независимой переменной) в фиксированной точке x_0 называется значение выражения $\Delta x = x - x_0$.

Приращением функции f в фиксированной точке x_0 называется значение выражения

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Замечания.

1) При фиксированном x_0 приращение Δf является функцией от Δx.

2) Для корректного определения Δf необходимо, чтобы x_0 и x принадлежали $D(f)$.

3) Приращение Δf называют также приращением зависимой переменной и для функции $y=f(x)$ обозначают Δy.

Типовое задание

Найдите приращение аргумента и приращение функции в точке $x_0=3$ для функции $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$ при $x=4$.

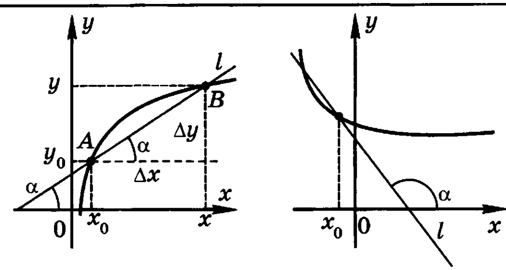
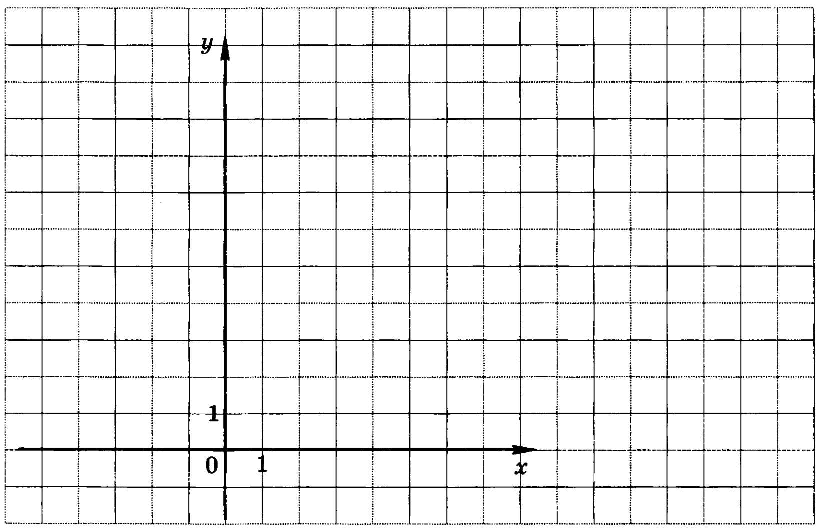
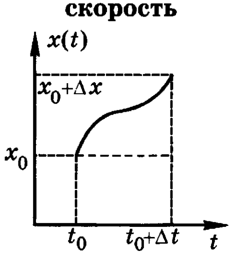
Решение.

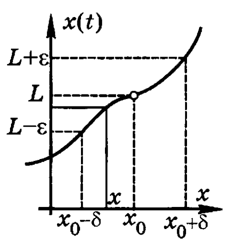
Секущая к графику функции

Секущей к графику функции называется прямая, проходящая через любые две точки данного графика.

Если уравнение секущей, проходящей через точку $(x_0;y_0)$, задано формулой $y=kx+b$, то $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где α – угол, который образует секущая с положительной полуосью оси абсцисс[1].

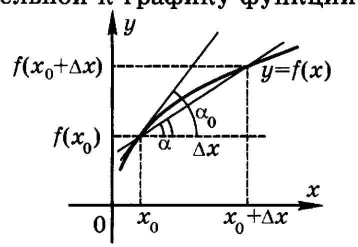
[1] Угол α отсчитывается от луча секущей, лежащего выше оси абсцисс, по часовой стрелке.

	 $\alpha < 90^\circ$ $\alpha > 90^\circ$ Прямая l – секущая к графику функции f.
Типовое задание	***Найдите угол, который образует секущая к графику функции $f(x)=\frac{x^2}{2}$, проходящая через точку $A(0;0)$ при $\Delta x=-2$, с положительной полуосью оси абсцисс. Выполните чертеж.*** ***Решение.*** 
Средняя скорость 	Если при прямолинейном движении за время Δt координата точки изменяется по закону $x(t)$, то средняя скорость движения точки выражается формулой $v_{cp}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$. **Средней скоростью изменения функции** f на промежутке с концами x_0 и $x_0+\Delta x$ называется значение выражения $$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

<table>
<tr><td>Полезное задание</td><td colspan="2">Для возрастающей (убывающей) на некотором интервале функции f определите:
а) знак выражения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
б) является ли угол, который секущая, проходящая через две точки графика функции на данном интервале, образует с положительной полуосью оси абсцисс, острым или тупым.</td></tr>
<tr><td>Полезное задание</td><td colspan="2">Определите знак приращения Δy для функций $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ при $\Delta x = -1$. Выполните чертежи.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Понятие о производной</td></tr>
<tr><td>Определение предела функции[1] в точке

</td><td colspan="2">Функция $f(x)$ стремится к числу L при x, стремящемся к x_0, если в окрестности точки x_0 разность $f(x)-L$ может быть сколь угодно мала. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что если $0 < |\Delta x| = |x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - L| < \varepsilon$.

При этом число L называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ или $f(x) \to L$ при $x \to x_0$.

Замечание. Исходя из определения приращения аргумента, условие $x \to x_0$ равносильно условию $\Delta x \to 0$.</td></tr>
<tr><td>Задачи, приводящие к понятию о производной</td><td>Задача о нахождении касательной к графику функции


$k(\Delta x) \to k = \mathrm{tg}\,\alpha_0$ при $x \to x_0$</td><td>Задача о нахождении мгновенной скорости
$x = x(t)$
$x_0 = x(t_0)$


$v_{ср} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$</td></tr>
</table>

[1] Более полные сведения о пределах приводятся в приложении.

	$(\alpha \to \alpha_0$ при $x \to x_0)$ $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	$v_{ср} \to v_{мгн}(t_0)$ при $t \to t_0$ $v_{мгн}(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} =$ $= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$
Полезное задание	***Выведите формулу для мгновенного ускорения, используя понятие среднего ускорения.***	
Определение производной	**Производной функции $f(x)$ в точке x_0** называется число, к которому стремится разностное отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. ***Обозначение.*** Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$. Таким образом, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Иными словами, ***производной функции в данной точке называется отношение приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.***	
Дифференцирование функции	Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если она имеет производную в этой точке. Функция $y = f'(x)$, сопоставляющая каждому значению x_0 из множества точек, в которых f дифференцируема, значение $f'(x_0)$, называется **производной функции f**. Нахождение производной данной функции f называется **дифференцированием** функции f.	

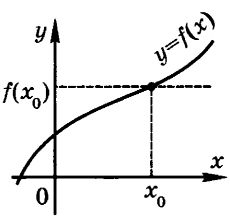
Вычисление производных по определению

$f(x)$	Вывод формулы	$f'(x)$
$f(x) = x^2$		

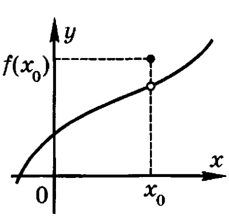
$f(x)=x^3$		
$f(x)=kx+b$		

Понятие о непрерывности функции и предельном переходе

Определение непрерывной функции



$f(x)$ непрерывна в точке x_0



$f(x)$ разрывна в точке x_0

Функция f называется **непрерывной** в точке x_0, если $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$.

Иными словами, функция f непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$.

Замечания.

1) Если функция f имеет производную в точке x_0, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$.

2) Если функция не является непрерывной в точке x_0, но существует при x, сколь угодно близких к x_0, то говорят, что данная функция *разрывна* в точке x_0 (x_0 – точка разрыва функции).

Типовое задание	*Постройте график функции «сигнум» (знак числа):* $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$ *Определите промежутки непрерывности и точки разрыва этой функции.* *Решение.*
<u>Теорема</u> (арифметические правила нахождения пределов)	**Пусть $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ при $x \to x_0$. Тогда при $x \to x_0$:** **1) $f(x) + g(x) \to A + B$;** **2) $f(x) - g(x) \to A - B$;** **3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$;** **4) при $B \neq 0$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$.** *Доказательства см. в учебнике Н.Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ–10», стр.* 161. ***Замечание.*** Очевидно, что для непрерывных в точке x_0 функций $f(x_0) = A$ и $g(x_0) = B$, то есть сумма, разность, произведение и частное функций, непрерывных в точке x_0, также непрерывны в точке x_0 (частное – в случае, если $g(x_0) \neq 0$).
Полезное задание	*Пользуясь определением непрерывной функции, докажите, что:* *а) линейная функция $f(x) = kx + b$ непрерывна на всей числовой оси;* *б) функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $x_0>0$;* *в) функция $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, непрерывна на всей числовой оси;*

	г) дробно-рациональная функция $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, *где* $P_n(x)$ *и* $Q_m(x)$ *– многочлены степени n и m, непрерывна на всей области определения.*
Типовое задание	*Определите, к какому числу стремится функция f, если:* *а)* $f(x)=-7x^2+10x-1$, $x\to 0$; $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2+x+1}$, $x\to -1$; *б)* $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x\to 1$; $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+1}$, $x\to -1$. *Решение.*
Полезное задание	*Приведите пример функции f и точки* x_0*, если:* *а) f существует и непрерывна в* x_0*;* *б) f существует в точке* x_0*, но разрывна в ней;* *в) f не существует в точке* x_0 *и разрывна в ней.* *Может ли функция быть непрерывна в точке, но не существовать в ней? Все приведенные примеры проиллюстрируйте графиками.*
Полезное задание	*Докажите, что функция Дирихле* $D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ — рациональное число},\\ 0, & x \text{ — иррациональное число},\end{cases}$ *разрывна во всех точках числовой оси.*

Вычисление производных

Лемма (о непрерывности дифференцируемой функции)	**Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке:** $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$, при $\Delta x \to 0$. *Доказательство.*

Основные правила дифференцирования

Формула (для функций $u(x)$ и $v(x)$, дифференцируемых в точке x_0)	**Доказательство или пример**
$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$, т.е. производная суммы равна сумме производных	

$(u \cdot v)'(x_0) =$ $= u'(x_0)v(x_0) +$ $+u(x_0)v'(x_0)$	
$(Cu)'(x_0) =$ $= C \cdot u'(x_0)$, где C – постоянный множитель (константа), т.е. постоянный множитель можно выносить за знак производной	
$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) =$ $= \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$	

Производные некоторых элементарных функций		
Формула	**Доказательство или пример**	***Типовое задание***
$C'=0$, где C – постоянная величина (константа)		*Найдите производную функции:* *а)* $f(x)=4x^2-x+7$; *б)* $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2+x+1}$. ***Решение.***
$x'=1$		
$(x^n)'=nx^{n-1}$, где $n\in \boldsymbol{Z}$ ($x\neq 0$ при $n\leq 1$)		
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$		*Найдите* $f'(x_0)$, *если:* *а)* $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}$, $x_0=1$; *б)* $f(x)=\left(x^2-3x\right)\cdot\sqrt{x}$, $x_0=4$. ***Решение.***
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$		

Производная сложной функции

Сложная функция	**Сложной функцией** (или композицией функций) принято называть функцию вида $h(x) = g(f(x))$.
Типовое задание	1) *Для функции* $h(x) = (2x-3)^7$ *выпишите функции* f *и* g, *из которых она составлена.* 2) *Из функций* $f(x) = \sin x$ *и* $g(x) = \sqrt{x}$ *составьте сложные функции* $g(f(x))$, $f(g(x))$, $f(f(x))$ *и* $g(g(x))$. *Решение.*
<u>Теорема</u> (о вычислении производной сложной функции)	**Если функция f имеет производную в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем** $$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$ *Доказательство.*

	Замечание. Упрощенно эту теорему формулируют так: «производная сложной функции равна производной внешней функции, умноженной на производную внутренней».
Типовое задание	*Найдите область определения и производную функции: а)* $f(x) = (3x+5)^3$; *б)* $f(x) = \sqrt{9-x^2}$. *В каждом из случаев сравните область определения функции с областью определения ее производной.* *Решение.*

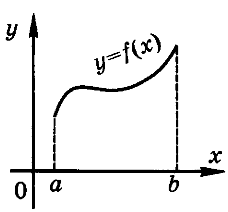
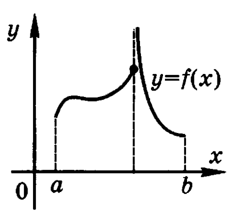
Производные тригонометрических функций

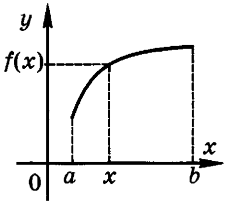
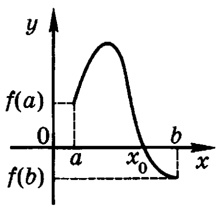
Первый замечательный предел	**Для углов, стремящихся к нулю, отношение синуса угла к его радианной мере стремится к единице:** $$\frac{\sin t}{t} \to 1 \text{ при } t \to 0.$$ *Обоснование этого утверждения см. в учебнике.*

Формула	Доказательство или пример	*Типовое задание*
$(\sin x)' = \cos x$		*Найдите* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *если* $f(x) = 3x - 4\cos x + 5\sin x$. *Решение.*
$(\cos x)' = -\sin x$		
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$		*Найдите* $f'(x)$, *если* $f(x) = \frac{\cos x - \operatorname{tg} x}{2\sin x}$. *Решение.*
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $x \neq \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$		
Типовое задание	*Найдите производную функции* $f(x)$ *в точке* x_0: *а)* $f(x) = x^3 \cdot \cos 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$; *б)* $f(x) = 3\sin 5x \cos 2x - 3\sin 2x \cos 5x$, $x_0 = 0$; *в)* $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. *Решение.*	

	Ответ: *а*) $-\frac{\pi^2}{3}$; *б*) 9; *в*) 0.
Полезное задание	*Верно ли, что*: *а*) *если для любого* $x \in (a;b)$ $f'(x) = g'(x)$, *то* $f(x) = g(x)$? *б*) *если для любого* $x \in (a;b)$ $f'(x) = 0$, *то* $f(x) = const$?

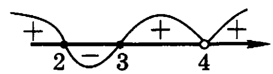
Применения непрерывности

Непрерывные функции	Функция называется **непрерывной** на промежутке I, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. В этом случае промежуток I называют **промежутком непрерывности** данной функции.  $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$  $f(x)$ не является непрерывной на $[a;b]$

Два свойства непрерывных функций  	1) Если на интервале $(a;b)$ функция непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она сохраняет постоянный знак (*теорема о знаке на интервале*); 2) если на промежутке $[a;b]$ функция $f(x)$ непрерывна, а $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то данная функция обращается в нуль в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$ (*теорема Больцано о промежуточном значении*). Эти свойства часто используют при решении уравнений и неравенств (*доказательства см. в учебнике Н.Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ*–10», *стр.* 156).

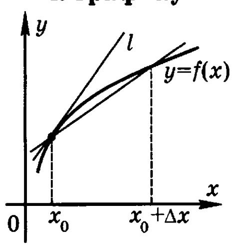
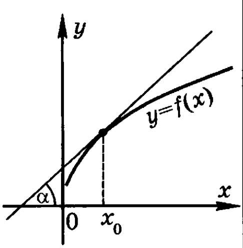
Общий метод интервалов для решения неравенств с одной переменной

Этапы решения	Примеры	
	$\dfrac{x^2+6}{(x-4)^2} \geq \dfrac{5x}{(x-4)^2}$	$\dfrac{\sqrt{10x-x^2-9}}{x-2} \geq 0$
1. Найдите область допустимых значений (ОДЗ) неравенства, т.е. множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.	ОДЗ: $x \neq 4$.	
2. Приведите неравенство к виду $f(x) > 0$ $(< 0, \geq 0, \leq 0)$.	$\dfrac{x^2+6-5x}{(x-4)^2} \geq 0;$	

3. Найдите корни уравнения $f(x)=0$.	$x^2+6-5x=0;$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$	
4. Отметьте найденные корни на ОДЗ неравенства, а затем определите и расставьте знаки функции $f(x)$ на каждом из полученных промежутков.		
5. Запишите ответ, объединив промежутки, в которых функция имеет знак, соответствующий знаку неравенства.	*Ответ*: $(-\infty;2]\cup[3;4)\cup(4;+\infty)$.	*Ответ*: $\{1\}\cup(2;9]$.
Типовое задание	*Решите неравенство*: *а*) $x^4-7x^2+6>0$; *б*) $\dfrac{x\sqrt{x-2}}{x^2-7x+12}\le 0$. ***Решение.***	

Ответ: *а*) $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup(1;1)\cup(\sqrt{6};+\infty)$; *б*) $\{2\}\cup(3;4)$.

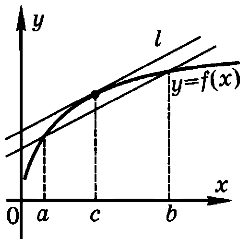
Касательная к графику функции

Понятие касательной к графику 	**Касательной к графику функции** $f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$ называется предельное положение секущей к данному графику, проходящей через точки графика с абсциссами x_0 и $x_0+\Delta x$, при $\Delta x\to 0$. ***Замечание.*** В отличие от касательной к окружности, имеющей с окружностью только одну общую точку, касательная к графику функции имеет с данным графиком одну общую точку лишь в некоторой окрестности точки касания и может пересекать график за пределами этой окрестности.
Геометрический смысл производной 	Для функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику $f(x)$, проходящей через точку x_0. $\boxed{k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)}$ В частности, если $f'(x_0)=0$, то касательная к графику $f(x)$ в точке x_0 параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней).

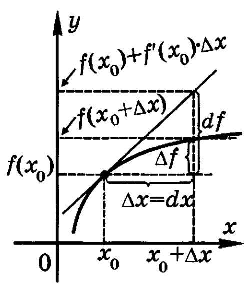
Типовое задание	*Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку графика функции* $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ *с абсциссой* $x_0=3$. *Решение.*
Типовое задание	*Найдите точки графика функции* $f(x)=4x^3-3x^2-6x-1$, *в которых касательная к графику параллельна оси абсцисс.* *Решение.*
Уравнение касательной	**Уравнение касательной к графику функции $f(x)$, проходящей через точку $(x_0; f(x_0))$, имеет вид** $$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$ **где x, y — переменные.** *Доказательство.*

Схема нахождения уравнения касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0		
Этапы решения	**Примеры**	
	$f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3,\ x_0 = -3$	$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1},\ x_0 = 1$
1. Вычислите $f(x_0)$.	$f(x_0) = f(-3) =$ $= 2\cdot(-3)^2 + \frac{1}{3}\cdot(-3)^3 = 9;$	
2. Найдите производную $f'(x)$.	$f'(x) = 4x + x^2;$	
3. Вычислите $f'(x_0)$.	$f'(x_0) = f'(-3) =$ $= 4\cdot(-3) + (-3)^2 = -3;$	
4. Подставьте значения x_0, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и приведите его к виду $y = kx + b$.	$y = 9 - 3(x+3) = -3x.$	
5. Запишите ответ.	*Ответ*: $y=-3x$.	*Ответ*: $y=-0,5x+1,5$.

Полезное задание	*Найдите уравнения касательных к графику функции* $y=x^2$, *проходящих через точку* $(2;1)$.
Полезное задание	*а) Углом между графиком функции и осью абсцисс в их общей точке называется угол наклона к оси абсцисс касательной к графику функции в этой точке.* *Найдите углы, под которыми синусоида* $y=\sin x$ *пересекает ось абсцисс.* *б) Углом между графиками двух функций в их общей точке называется угол между касательными к данным графикам в этой точке.* *Найдите угол между графиками функций* $y=x^2$ *и* $y=\sqrt{x}$.

Формула Лагранжа  	**Если функция f, непрерывная на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется точка $c \in (a;b)$, такая, что** $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$ Это означает, что на интервале $(a;b)$ найдется точка c, в которой касательная к графику функции f параллельна секущей, проходящей через точки $(a;f(a))$ и $(b;f(b))$. *Доказательство см. в учебнике Н.Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ*–10», *стр.* 196. ***Замечание.*** Часто формулу, доказанную в теореме Лагранжа, записывают в виде $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ и называют *формулой конечных приращений.*
Полезное задание	*Используя формулу конечных приращений, докажите, что* $\sin x - \sin y \le (x - y)\cos y$, *где* $x, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Приближенные вычисления[1]

Дифференциал функции и приближенные вычисления  	**Дифференциалом функции** f в точке x_0 называется произведение $f'(x_0) \cdot \Delta x$. ***Обозначение.*** Дифференциал функции f обозначается df. Геометрический смысл дифференциала – приращение ординаты вдоль касательной к графику функции, соответствующее приращению Δx. Часто приращение аргумента Δx называют его дифференциалом и обозначают dx. Очевидно, что $f'(x_0) = \frac{df}{dx}$. При малых значениях Δx для функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, $$f(x) = f(x_0) + \Delta f \approx f(x_0) + df, \text{ или } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$
Типовое задание	*Найдите приближенные значения выражений*: *а*) $(1{,}01)^{100}$; *б*) $\sin 29°$.

[1] О методе половинного деления для приближенного решения уравнений см. в приложении.

	Решение.

Механический смысл производной

Вычисление скорости при прямолинейном движении	Если при прямолинейном движении вдоль оси Ox координата точки изменяется по закону $x=x(t)$, то производная от координаты по времени есть скорость движения точки: $$v(t) = x'(t).$$
Вычисление ускорения при прямолинейном движении	Если при прямолинейном движении вдоль оси Ox скорость точки изменяется по закону $v=v(t)$, то производная от скорости по времени есть ускорение: $$a(t) = v'(t).$$ Таким образом, для тела, движущегося прямолинейно по закону $x=x(t)$, ускорение равно второй производной от координаты по времени: $$a(t) = v'(t) = x''(t).$$
Типовое задание	*Тело движется прямолинейно по закону* $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + t + 18$. ***Найдите скорость и ускорение тела в момент*** $t=3c$ ***(расстояние измеряется в метрах, время – в секундах).*** *Решение.*

Дополнительные сведения и задачи по теме

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Признак возрастания (убывания) функции

Достаточные условия монотонности функции

1) Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.

2) Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.

Доказательство.

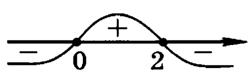
Замечание. Если функция, монотонная на $(a;b)$, непрерывна в точке a (или b), то данная функция монотонна на $[a;b)$ (или $(a;b]$), т. е. эту точку можно присоединить к промежутку монотонности.

Доказательство.*

Пусть $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, f непрерывна в точке b. Предположим, что функция f не возрастает на $(a;b]$. Тогда найдется точка $x_1 \in (a;b)$, такая, что $f(x_1) \geq f(b)$. Но, в силу возрастания f на $(a;b)$, найдется точка $x_0 \in (x_1;b)$ такая, что $f(x_0) > f(b)$. В силу непрерывности f в точке b, найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in (b-\delta; b+\delta)$ $|f(x) - f(b)| < f(x_0) - f(b)$.

Рассмотрим любое число $c \in (b-\delta; b)$, такое, что $c > x_0$. Очевидно, что $f(c) - f(b) < f(x_0) - f(b)$, т.е. $f(c) < f(x_0)$, $a < x_0 < c < b$. Но это противоречит возрастанию функции на $(a;b)$. Значит, $f(x)$ возрастает на $(a;b]$.

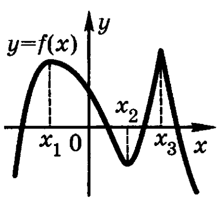
Схема исследования функции на монотонность

Этапы исследования	Примеры	
	$f(x) = 4 + 3x^2 - x^3$	$f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
1. Найдите область определения функции $D(f)$.	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	
2. Найдите производную данной функции и область ее определения $D(f')$.	$f'(x) = 6x - 3x^2$, $D(f') = (-\infty; +\infty)$	
3. Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$.	$3x(2 - x) = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$	
4. Нанесите найденные корни на общую часть $D(f)$ и $D(f')$ и определите знаки производной на каждом из образовавшихся интервалов.		
5. Пользуясь достаточными условиями монотонности, определите интервалы возрастания и убывания данной функции. Запишите в ответ промежутки монотонности функции с учетом крайних точек найденных интервалов (см. замечание к достаточным условиям монотонности).	*Ответ*: f убывает на $(-\infty; 0]; [2; +\infty)$, f возрастает на $[0; 2]$.	

Замечание. Еще раз обратим внимание на то, что промежутки монотонности функции указываются через точку с запятой.

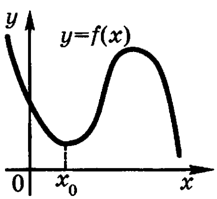
Типовое задание	*Докажите, что функция* $y = 2x + \sin x$ *является возрастающей на всей числовой оси.* *Решение.*

Критические точки функции, максимумы и минимумы

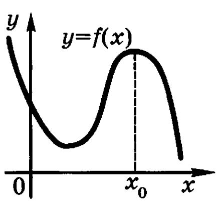
Определение критических точек 	**Критическими точками функции** называются внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует. x_1, x_2, x_3 – критические точки функции $f(x)$.
Типовое задание	*Найдите критические точки функции:* *а)* $f(x) = (x+3)^2(x-5)^2$; *б)* $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+4}$; *в)* $f(x) = \cos 1{,}5x - 2$. *Решение.*

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Точки экстремума и экстремумы функции



x_0 — точка минимума



x_0 — точка максимума

</td><td>

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Значение функции в точке минимума называется **минимумом** функции.

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума называется **максимумом** функции.

Точки минимума и максимума иначе называют **точками экстремума**, а минимумы и максимумы – **экстремумами** функции.

Замечания.
1) Из определения экстремумов следует, что данная функция определена в некоторой их окрестности.
2) Более точно определенные выше экстремумы называются *локальными экстремумами функции*. Это связано с тем, что значения функции в точках экстремума не обязательно являются наибольшими (наименьшими) значениями, которые принимает функция на всей области определения.

</td></tr>
<tr><td>

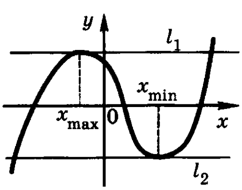
Теорема Ферма (необходимое условие экстремума)

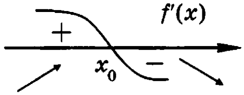
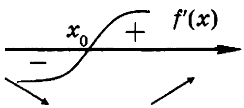
</td><td>

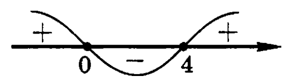
Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

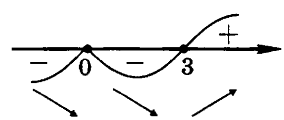
Доказательство.

</td></tr>
</table>

	***Замечания.*** 1) Обратная теорема не верна: если $f'(x_0) = 0$, то функция f не обязательно имеет экстремум в точке x_0. Например, функция $f(x) = x^3$ не имеет экстремума в нуле, хотя ее производная в нуле равна нулю. 2) Если $f'(x_0)$ не существует, то x_0 также может быть точкой экстремума: так, функция $f(x) = \lvert x \rvert$ имеет минимум в нуле, но не имеет производной в нуле. 3) Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что касательная к графику функции в точке экстремума параллельна оси абсцисс (если такая касательная существует).
Полезное задание	*Докажите, что для функции $f(x) = \sqrt{x}$ при любом $x>0$ $f(x) > f(0)$, но точка 0 – не критическая точка и не точка экстремума данной функции.*
Полезное задание (теорема Ролля)	*Если функция f непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$, то на интервале $(a;b)$ найдется точка c, такая, что $f'(c) = 0$. Докажите. Верно ли обратное утверждение?*

Признаки экстремума функции  	**1) Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.** **2) Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.** *Доказательство.*
Типовое задание	*Найдите точки экстремума и экстремумы функции:* *а)* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$; *б)* $f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{4}{x^2}$. *Решение.* *Ответ:* *б)* $x_{\min} = \pm\sqrt{6}$, $y_{\min} = y\left(-\sqrt{6}\right) = y\left(\sqrt{6}\right) = \frac{4}{3}$.

<table>
<tr><th colspan="2">Применение производной к исследованию функции[1]</th></tr>
<tr><th>Этапы
исследования</th><th>Пример
$f(x) = x^4 - 4x^3$</th></tr>
<tr><td>1. Найдите область определения и область значений функции (область значений – если это возможно).</td><td>$D(f) = R$, т.к. f – многочлен.</td></tr>
<tr><td>2. Выясните особенности функции (четность, нечетность, периодичность).</td><td>$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3$
f не является ни четной, ни нечетной; f не является периодической.</td></tr>
<tr><td>3. Определите нули функции, точки пересечения графика с осями координат.</td><td>Нули: $f(x) = 0$; $x^4 - 4x^3 = 0$;
$x^3(x-4) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$
Точки пересечения графика
с осью Ox: (0;0), (4;0) ; с осью Oy: (0;0).</td></tr>
<tr><td>4. Найдите промежутки знакопостоянства функции.</td><td>$f(x) = x^3(x-4)$


$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$,
$f(x) < 0$ при $x \in (0; 4)$.</td></tr>
<tr><td>5. Найдите производную и определите критические точки функции. Найдите промежутки возрастания и убывания функции.</td><td rowspan="2">$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
$4x^2(x-3) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3. \end{array}\right.$
0; 3 – критические точки функции.


<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty;0)$</td><td>0</td><td>(0;3)</td><td>3</td><td>$(3;+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\downarrow$</td><td>0</td><td>$\downarrow$</td><td>–27</td><td>$\uparrow$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>min</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>6. Найдите точки экстремума и экстремумы функции.</td></tr>
</table>

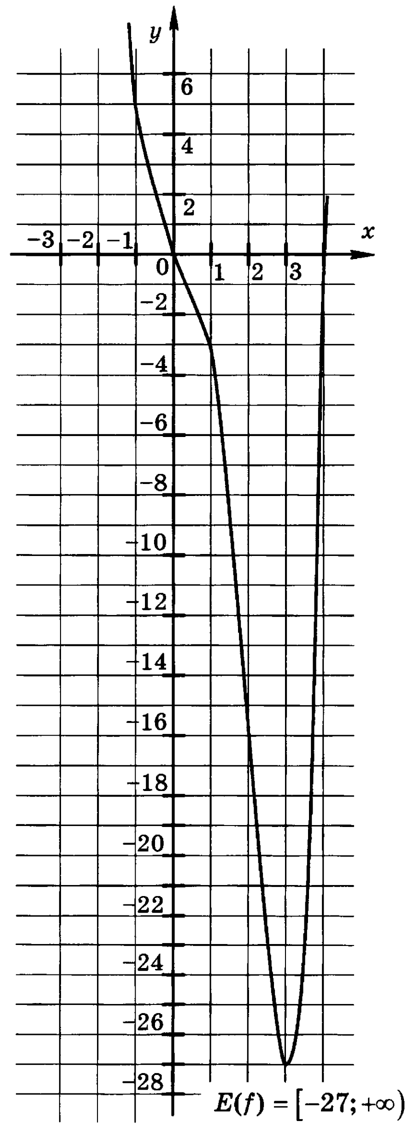
[1] Расширенная схема исследования функции с помощью производной приводится в приложении.

7. Исследуйте поведение функции в окрестности «особых» точек, при больших по модулю значениях аргумента; при необходимости для уточнения вида графика найдите несколько дополнительных точек.

Для уточнения вида графика рассмотрим несколько дополнительных точек.

x	-2	-1	1	2	5
y	48	5	-3	-16	125

8. Постройте график функции и найдите область ее значений (если она не была найдена в п.1).



Типовое задание	*Исследуйте функцию* $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ *и постройте ее график.* **Решение.**
Типовое задание	*Определите, сколько корней имеет уравнение* $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

	Решение. *Ответ*: *три.*

Наибольшее и наименьшее значения функции

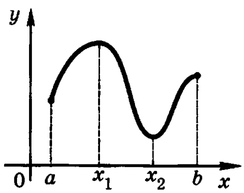
<u>Теорема</u> **Вейерштрасса**  $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$, $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$	**Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.** Это означает, что существуют точки отрезка $[a;b]$, в которых функция f принимает наибольшее и наименьшее на $[a;b]$ значения. *Доказательство см. в учебнике* *Н.Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ*–10», *стр.* 189. ***Обозначение.*** Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ обозначается $\max\limits_{[a;b]} f(x)$; наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ обозначается $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f на отрезке $[a;b]$

Этапы решения (для функции f, непрерывной на $[a;b]$ и имеющей на нем конечное число критических точек)	**Примеры**	
	Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ *на отрезке* $[1;3]$.	*Найдите наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x) = \sqrt{2}\sin x - x$ *на отрезке* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
1. Найдите область определения функции	$D(f)$: $x \neq 0$	

2. Найдите $f'(x)$.	$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$;	
3. Найдите критические точки функции $f(x)$ и выберите те из них, которые принадлежат данному отрезку.	Поскольку производная существует на всей области определения данной функции, то критическими будут те точки, для которых $f'(x) = 0$: $1 - \frac{4}{x^2} = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$. $-2 \notin [1;3]$; $2 \in [1;3]$.	
4. Найдите значения данной функции в критических точках, принадлежащих отрезку $[a;b]$, а также в точках a и b, и выберите среди найденных значений функции наибольшее и наименьшее.	$f(2) = 4$; $f(1) = 5$; $f(3) = 4\frac{1}{3}$.	
5. Запишите ответ.	*Ответ*: $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(1) = 5$; $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = 4$.	*Ответ*: $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{2}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$; $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{2}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$.

Типовое задание	*Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке*: $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3;0]$. *Решение.*

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на интервале	Пусть функция f непрерывна на интервале I и имеет на этом интервале единственную точку экстремума x_0. Тогда, если x_0 – точка максимума, то $\max\limits_I f(x) = f(x_0)$; если x_0 – точка минимума, то $\min\limits_I f(x) = f(x_0)$.
Типовое задание	*Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном интервале (если они существуют):* *а)* $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $(0;+\infty)$; *б)* $f(x) = \dfrac{(x^2+2)^2}{x^2-1}$, $(-1;1)$. *Решение.* *Ответ:* *а)* $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = 2$; *б)* $\max\limits_{(-1;1)} f(x) = f(0) = -4$.

Схема решения прикладных задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения

Этапы решения	**Пример.** *Периметр прямоугольника равен 20 см. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?*
1. «Переведите» задачу на язык функций. Для этого нужно ввести подходящую переменную x, так, чтобы интересующая нас наибольшая (наименьшая) величина выражалась как функция от x.	

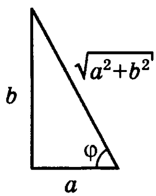
2. Определите ограничения на переменную x, т.е. отрезок (интервал) значений, которые она может принимать.	
3. Решите задачу о нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции.	
4. Выясните, какой практический смысл (в терминах данной задачи) имеет полученный результат, и запишите ответ.	
Типовое задание	*Представьте число 20 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение одного из них на куб другого было наибольшим.* *Решение.*

	Ответ: 15 *и* 5.
Типовое задание	***Определите длины сторон прямоугольника с площадью 36 см^2, имеющего наименьший периметр.*** ***Решение.*** *Ответ*: 6 *см и* 6 *см.*
Полезное задание	*Боковая сторона и меньшее основание равнобедренной трапеции равны 2 см. Какую длину должно иметь большее основание, чтобы площадь трапеции была наибольшей?* ***Указание.*** *При составлении функции $S(x)$ рассмотрите в качестве x величину острого угла трапеции.*

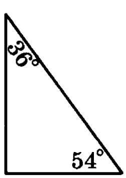
Дополнительные сведения и задачи по теме

ПРИЛОЖЕНИЕ

Способы преобразования тригонометрических выражений

Вид выражения	Способ преобразования	Пример
$a\sin\alpha + b\cos\alpha$ 	**Метод вспомогательного угла.** Умножьте и разделите данное выражение на $\sqrt{a^2+b^2}$. Рассмотрите прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой $\sqrt{a^2+b^2}$. Выражения $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ являются синусом и косинусом острого угла φ этого треугольника. Пусть угол φ определяется из условий $\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$ Тогда $\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$ $= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$	*Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения* $\sin\alpha + \cos\alpha$. *Ответ*: $\sqrt{2}; -\sqrt{2}$.
$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha \times$ $\times\ldots\cdot\cos 2^n\alpha$	Домножение и деление на $2^{n+1}\sin\alpha$ и «сворачивание» по формуле синуса двойного угла: $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha =$ $= \dfrac{2^{n+1}\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha} =$ $= \dfrac{2^n\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha} =$ $= \ldots = \dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$	*Вычислите*: $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$. *Ответ*: 0,125.

$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+$ $+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+$ $+\sin(\alpha+n\beta)$ или $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+$ $+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+$ $+\cos(\alpha+n\beta)$, где $\beta\neq 2\pi n$	Домножение и деление на $\sin\frac{\beta}{2}$ и применение формул преобразования произведения в сумму.	*Вычислите* $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}$.
Замечание. В случае $\beta=2\pi n$ используются формулы приведения.		
$\sqrt{1\pm\sin\alpha}$	Иногда удобно представить единицу как $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$: $\sqrt{1\pm\sin\alpha}=$ $=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}==$ $=\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\left\|\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right\|$.	*Упростите выражение* $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}$ *при* $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. *Ответ*: $2\cos\frac{\alpha}{2}$.

$a \pm b\sin\alpha$ или $a \pm b\cos\alpha$, $b \ne 0$	$a \pm b\sin\alpha = b\left(\frac{a}{b} \pm \sin\alpha\right) =$ $= b(\sin\varphi \pm \sin\alpha)$, где $\lvert b\rvert > \lvert a\rvert$. Представьте дробь $\frac{a}{b}$ как синус или косинус некоторого угла, и примените формулы суммы или разности тригонометрических функций.	*Разложите на множители*: $1+2\sin\alpha$.
$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha$, $\sin^{3n}\alpha + \cos^{3n}\alpha$	Рассматривая данные слагаемые как квадраты или кубы, воспользуйтесь формулами сокращенного умножения; при этом необходимо добавить и вычесть выражения, необходимые для выделения полного квадрата.	*Вычислите* $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi$ *при* $\varphi = \frac{\pi}{12}$. *Ответ*: 0,875
$\sin\alpha \pm \cos\beta$	Используйте формулы приведения $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ или $\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ и формулы преобразования суммы в произведение.	*Преобразуйте в произведение*: $\sin\frac{\pi}{7} - \cos\alpha$.
Выражения, содержащие углы 18°, 36°, 54° 	Используйте формулы приведения, а также тригонометрические формулы двойного или тройного угла.	*Вычислите* $\sin 18°$. Т.к. $\sin 36° = \cos(90° - 36°) = \cos(3 \cdot 18°)$, то $2\sin 18°\cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$; $2\sin 18° = 4(1 - \sin^2 18°) - 3$; $4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$, откуда $\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Типовое задание	*Упростите выражение* $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos 7\alpha$. *Решение.* *Ответ*: $\dfrac{\sin\dfrac{7\alpha}{2}\cos 4\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.
Типовое задание	*Представьте в виде произведения выражение* $2\cos^2 3\alpha + \sqrt{3}\sin 6\alpha - 1$. *Решение.*

Решение некоторых видов тригонометрических уравнений

Уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d,\ d \neq 0$

Подход к решению	**Примеры**	
	$5\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 3\sin^2 x = 2$	$4\sin^2 x + \sin 2x = 3$
Представьте число d как $d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ и приведите уравнение к виду $a_1\sin^2 x + b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x = 0$.	$5\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 3\sin^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, $3\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 5\sin^2 x = 0$.	

	Т.к. значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. $$3 - 2\operatorname{tg} x - 5\operatorname{tg}^2 x = 0$$ Замена переменной $y = \operatorname{tg} x$. $$3 - 2y - 5y^2 = 0$$ $$\left[\begin{array}{l} y = -1, \\ y = 0,6. \end{array}\right.$$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 0,6; \end{array}\right.$ $$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg} 0,6 + \pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$ *Ответ*: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 0,6 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.	*Ответ*: $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c,\ c \neq 0$

Подход к решению	Примеры	
	$\sin x + \cos x = 1$	$2\sin x - 3\cos x = 2$
1-ый способ «Сверните» левую часть уравнения с помощью метода вспомогательного угла и формул сложения.	$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;	

	$x=(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$ *Ответ*: $(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$	*Ответ*: $(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}+$ $+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$
2-ой способ Пользуясь формулами двойного угла, представьте $\sin x$ и $\cos x$ через функции угла $\frac{x}{2}$ и сведите данное уравнение к уравнению предыдущего типа.	$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=$ $=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2};$ $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=0.$ Разложим левую часть уравнения на множители: $2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0;$ $\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0,\\ \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi n,\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z};$ $\left[\begin{array}{l}x=2\pi n,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}.$ *Ответ*: $2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $n\in\mathbf{Z}.$	*Ответ*: $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -2\operatorname{arctg}5+2\pi n,$ $n\in\mathbf{Z}.$

Замечания.
1) Различные формы записи ответа при решении уравнения разными способами выражают один и тот же ответ, в чем легко убедиться, изобразив множество решений уравнения на тригонометрической окружности или применив тождественные преобразования.

2) Если в данном уравнении коэффициенты при синусе и косинусе равны, удобно воспользоваться формулой приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и применить формулу суммы синусов: $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Уравнения, содержащие тригонометрические функции четных степеней

<table>
<tr><th rowspan="2">Подход к решению</th><th colspan="2">Примеры</th></tr>
<tr><th>$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$</th><th>$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$</th></tr>
<tr>
<td>Пользуясь формулами понижения степени $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ или $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, преобразуйте данное уравнение так, чтобы все входящие в него тригонометрические функции имели первую степень, и попытайтесь решить полученное уравнение методом разложения на множители.</td>
<td>$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$;
после преобразований получим:
$\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$;
$\cos 4x + 2\cos 4x\cos 2x = 0$;
$2\cos 4x(\cos 2x + 0{,}5) = 0$;
$\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0,\\ \cos 2x = -0{,}5;\end{array}\right.$
$\left[\begin{array}{l}4x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\end{array}\right. n \in \boldsymbol{Z}$;
$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\end{array}\right. n \in \boldsymbol{Z}$.
Ответ:
$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.</td>
<td>*Ответ*: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.</td>
</tr>
</table>

Изменение ОДЗ при решении тригонометрических уравнений

<table>
<tr><td>«Опасности», связанные с изменением ОДЗ уравнения</td><td colspan="2">Изменение ОДЗ уравнения:
• потеря корней – происходит за счет применения тригонометрических формул, сужающих ОДЗ; потерю корней можно предотвратить проверкой на принадлежность множеству корней уравнения значений переменной, которые «теряются» при применении формулы;
• появление посторонних корней – происходит за счет расширения ОДЗ при решении уравнения; появление посторонних корней можно предотвратить с помощью «отбора корней», то есть проверки найденных решений на принадлежность ОДЗ и (или) подстановки их в исходное уравнение.</td></tr>
<tr><td>Тригонометрические формулы, приводящие к сужению ОДЗ</td><td>Формула
(в случае применения слева направо)</td><td>Значения переменной, которые нужно проверить
(если они входят в ОДЗ исходного уравнения)</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$
$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\alpha}$
$\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right)$
$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$</td><td>$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\operatorname{ctg}(x \pm \alpha) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}\alpha \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg} x}$
$(\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z})$
$\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$</td><td>$x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$</td><td>$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$</td></tr>
</table>

	$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$	$x=2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$
	Универсальная тригонометрическая подстановка: $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\operatorname{tg} x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$	$x=\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$

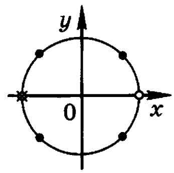
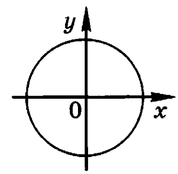
Применение универсальной тригонометрической подстановки к решению тригонометрических уравнений

Подход к решению	**Примеры**	
	$\sin x+\cos x=1$	$\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=\dfrac{16}{15}\operatorname{ctg} x$
1) Пользуясь формулами подстановки, сведите данное уравнение к дробно-рациональному относительно тангенса половинного угла. 2) Решив полученное уравнение, проверьте, являются ли корнями исходного уравнения значения x, при которых тангенс половинного угла не существует.	$\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=1.$ 1) Замена переменной $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. $\dfrac{2y}{1+y^2}+\dfrac{1-y^2}{1+y^2}=1;$ $2y+1-y^2=1+y^2;$ $2y-2y^2=0;$ $\left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=1; \end{array}\right.$	

	отсюда $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=\pi n, \\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n, \end{array}\right. n\in \boldsymbol{Z};$ $\left[\begin{array}{l} x=2\pi n, \\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \end{array}\right. n\in \boldsymbol{Z}.$ 2) Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует, то $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, т.е. $x=\pi+2\pi n$. Проверка показывает, что эти значения корнями исходного уравнения не являются. *Ответ*: $2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$	*Ответ*: $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Подход к решению	**Примеры**	
	$\frac{\sin 3x-\sin x}{1+\cos x}=0$	$\sin 4x\operatorname{tg}x=0$
1. Найдите ОДЗ данного уравнения.	ОДЗ: $1+\cos x\neq 0$; $\cos x\neq -1$; $x\neq \pi+2\pi m,\ \ m\in \boldsymbol{Z}.$	
2. Решите уравнение без учета ОДЗ.	$\sin 3x-\sin x=0$; $2\sin x\cos 2x=0$; $\left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos 2x=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pi n, \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \end{array}\right. n,\ k\in \boldsymbol{Z}.$	

3. Найдите общий период T (желательно наименьший) всех тригонометрических функций, входящих в уравнение.	$T(\sin 3x) = \frac{2\pi}{3}$; $T(\sin x) = T(\cos x) = 2\pi$; $T = 2\pi$.	
4. На тригонометрической окружности или отрезке числовой оси длиной T отметьте найденные корни уравнения и исключите те из них, которые не входят в ОДЗ.	 × $\pi+2\pi m$ ○ πn • $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$	
5. Запишите ответ с учетом периода.	*Ответ*: $2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.	*Ответ*: πn; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечания.

1) При необходимости отбора корней целочисленные переменные, входящие в запись ответов, удобно обозначать разными буквами.

2) Отбор корней полезно также проводить в случаях, когда корни уравнения описываются несколькими формулами, причем множества корней, задаваемых различными формулами, имеют общие элементы. Например, корни, заданные формулой $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, полностью входят в множество корней $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, поэтому в ответе из этих двух формул достаточно указать только вторую.

Типовое задание	*Решите уравнения:* *а*) $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin x} = 0$; *б*) $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = 0$; *в*) $\sqrt{\cos 2x}\cos x = 0$. *Решение.*

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\dfrac{\pi k}{2},\ k\in \boldsymbol{Z}$; в) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Решение тригонометрических систем

Вид системы	$\begin{cases}\textit{Алгебраическое ур - е}\\ \textit{Тригонометрическое ур - е}\end{cases}$	$\begin{cases}\textit{Тригонометрическое ур - е}\\ \textit{Тригонометрическое ур - е}\end{cases}$
Метод решения	Сочетание методов решения систем уравнений (подстановки, сложения и др.) с методами решения тригонометрических уравнений. ***Замечание***. Первым этапом решения систем, содержащих алгебраическое уравнение, является подстановка значения одной из переменных (пример 1) или выражения с переменными (пример 2) из алгебраического уравнения в тригонометрическое.	
Особенности решения	1) При решении тригонометрических систем для записи решений простейших тригонометрических уравнений, содержащих синус и косинус, часто необходимо пользоваться не одной, а двумя формулами.	

Вид уравнения ($\lvert a\rvert < 1,\ a \neq 0$)	**Запись решений**
$\sin x = a$	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$
$\cos x = a$	$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n, \\ x = -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$

Использование общих формул может привести к ошибке.

2) Если тригонометрическая система сводится к системе двух простейших тригонометрических уравнений (пример 3), то при решении каждого из них нужно использовать свой целочисленный параметр. Попытка использовать вместо нескольких параметров один приводит к потере решений.

Примеры решения систем

Пример 1

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x + \sin y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x, \\ \cos x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1; \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = 0,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 0,5; \end{cases}$$

Пример 3

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0,25, \\ \sin x \sin y = 0,75; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -0,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x, \\ 2\cos x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} - x, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \dfrac{5\pi}{6} - 2\pi n, \end{cases} \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{6} - 2\pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} - 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{\pi}{3} = 0,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \sin\dfrac{x+y}{2} = 0,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{x+y}{2} = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{array}\right. \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{3} + 4\pi n, \end{cases} \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Применяя в каждой из систем способ сложения, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$$

$n,\ k \in \mathbf{Z}$;

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ \left[\begin{array}{l} x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. \end{cases}$$

$n,\ k \in \mathbf{Z}$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \end{array}\right.$$

$n,\ k \in \mathbf{Z}$.

Применяя в каждой из систем способ сложения, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k + \pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi k - \pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k + \pi n, \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k - \pi n, \end{cases} \end{array}\right.$$

$n,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi k + \pi n; \dfrac{\pi}{3} + \pi k - \pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi k + \pi n; -\dfrac{\pi}{3} + \pi k - \pi n\right)$, $n,\ k \in \mathbf{Z}$.

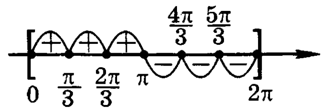
	Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.	

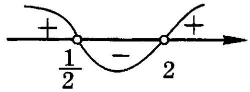
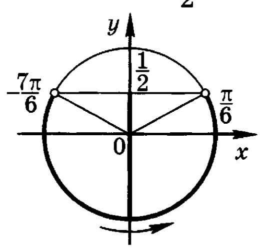
Типовое задание	*Решите систему уравнений:* а) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ \sin x+\sin y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x\cos y=0,5, \\ \cos x\sin y=0,5. \end{cases}$ *Решение.*

	Ответ: *а)* $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; *б)* $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\pi n-\frac{\pi k}{2}\right)$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Применение метода интервалов при решении тригонометрических неравенств

I. Этапы применения метода интервалов для тригонометрических функций	**Примеры**	
	$\sin x+\sin 3x+\sin 5x \geq 0$	$\operatorname{ctg} x-\sin 2x<0$
1. Преобразуйте неравенство так, чтобы в левой части стояло произведение множителей, линейных относительно тригонометрических функций, а в правой – ноль.	$2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x \geq 0$; $2\sin 3x(\cos 2x+0,5) \geq 0$; $\sin 3x(\cos 2x+0,5) \geq 0$.	$\operatorname{ctg} x(1-2\sin^2 x)<0$
2. Найдите наименьший положительный период T функции, стоящей в левой части неравенства.	$T_1(\sin 3x)=\frac{2\pi}{3}$; $T_2(\cos 2x+0,5)=\pi$; $T=2\pi$.	

3. Решите неравенство методом интервалов на любом отрезке длиной T, концы которого являются нулями функции, стоящей в левой части неравенства (или на тригонометрической окружности).	$\sin 3x(\cos 2x + 0,5) \geq 0$ 1) $\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}.$ 2) $\cos 2x + 0,5 = 0$, $\cos 2x = -0,5$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$  $x \in [0;\pi] \cup \left\{\frac{4\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3}\right\}$	
4. Запишите ответ с учетом периода T.	*Ответ*: $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right\} \cup$ $\cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right\},\ n \in \boldsymbol{Z}.$	*Ответ*: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$
II. Этапы применения метода интервалов в сочетании с заменой переменной	**Примеры**	
	$3\sin^2 x + \cos^2 x > 5\sin x - 1$	$\sin x + \cos 2x > 1$
1. Преобразуйте неравенство так, чтобы в левой части стояло целое или дробно-рациональное выражение относительно одной из тригонометрических функций, а в правой – ноль.	$2\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x -$ $-5\sin x + 1 > 0$; $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$.	

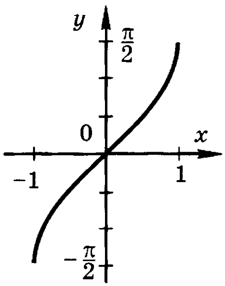
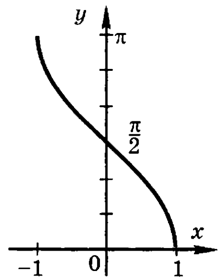
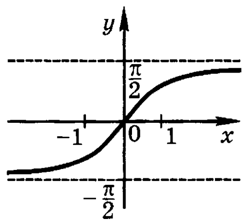
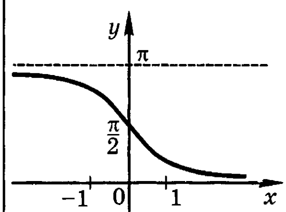
2. Выполните замену переменной и решите полученное неравенство методом интервалов.	Пусть $\sin x = t$, тогда $2t^2 - 5t + 2 > 0$; $2(t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right) > 0$  	
3. Представьте найденное решение в виде двойного неравенства (системы) или совокупности неравенств и сделайте обратную замену.	$\left[\begin{array}{l} t < \frac{1}{2}, \\ t > 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 2. \end{array}\right.$	
4. Решите полученные простейшие тригонометрические неравенства.	1) $\sin x < \frac{1}{2}$  $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ 2) $\sin x > 2$ – решений нет, т.к. $\sin x \in [-1; 1]$.	
5. Запишите ответ.	*Ответ*: $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}.$	*Ответ*: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup$ $\cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}.$
Типовое задание	*Решите двумя способами неравенство* $\cos 3x + 2\cos x \geq 0$. *Решение.*	

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right] \cup$

$\cup \left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Аркфункции

Свойства и графики аркфункций

$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
			
$D(y) = [-1;1]$	$D(y) = [-1;1]$	$D(y) = (-\infty;+\infty)$	$D(y) = (-\infty;+\infty)$
$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$E(y) = [0;\pi]$	$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$E(y) = (0;\pi)$
нечетная: $\arcsin(-x) =$ $= -\arcsin x$	ни четная, ни нечетная: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$	нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$	ни четная, ни нечетная: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$
возрастающая	убывающая	возрастающая	убывающая

Полезное задание — *Докажите, что графики функций* $y = \sin x$ *и* $y = \arcsin x$ *для* $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *симметричны относительно прямой y=x. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для других аркфункций.*

Вычисление значений тригонометрических функций с аргументами, содержащими аркфункции

Этапы решения	Пример	
	Вычислите $A = \sin\left(\arccos\frac{5}{13} - \operatorname{arctg} 2\right).$	*Вычислите* $A = \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5} + 2\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right).$
1. Замените все аркфункции в аргументе новыми переменными.	Пусть $\arccos\frac{5}{13} = x$, тогда $x \in [0;\pi]$, $\cos x = \frac{5}{13}$.	

	Пусть $\operatorname{arctg} 2 = y$, тогда $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} y = 2$.	
2. Преобразуйте выражение с новыми переменными, используя тригонометрические формулы.	$A = \sin(x - y) =$ $= \sin x \cos y - \cos x \sin y$	
3. Найдите значения тригонометрических функций от новых переменных, используя значение одной из них, известное из уравнения замены.	$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$ Т.к. $x \in [0;\pi]$, то $\sin x = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$. $\cos y = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$. Т.к. $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos y = \sqrt{\frac{1}{1 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. $\sin y = \operatorname{tg} y \cdot \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}$.	
4. Используя полученные результаты, вычислите значение данного выражения.	$A = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{5}{13} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{13\sqrt{5}}$.	
5. Запишите ответ.	*Ответ*: $\frac{2}{13\sqrt{5}}$.	*Ответ*: $7\frac{25}{116}$.

Типовое задание	*Докажите тождество*: $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{7} = \frac{3\pi}{4}$.

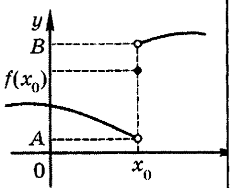
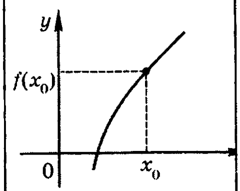
	Решение. *Указание. Рассмотрите котангенсы от обеих частей тождества.*
Полезное задание	*Докажите формулы*: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, *если* $\lvert x \rvert \le 1$; $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

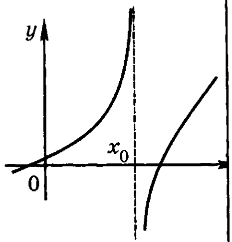
Преобразование выражений вида $f_{\text{триг}}(\operatorname{arc}f_{\text{триг}}(x))$ *и* $\operatorname{arc}f_{\text{триг}}(f_{\text{триг}}(x))$

Идея решения	Примеры
$f_{\text{триг}}(\operatorname{arc}f_{\text{триг}}(x))=x$, если x входит в область определения аркфункции. Если тригонометрическая функция и аркфункция не соответствуют друг другу, то можно попытаться ввести новую переменную (этот способ описан выше).	$\sin(\arcsin 0{,}2) =$ $\sin(\arcsin 0{,}6) =$

$\operatorname{arc}f_{\text{триг}}(f_{\text{триг}}(x))=x$, если x входит в область значений аркфункции. Если x не входит в область значений аркфункции, необходимо добавлением или вычитанием nT, где T – период данной тригонометрической функции, добиться, чтобы аргумент входил в область значений аркфункции.	
Типовое задание	*Решите уравнения*: *а*) $\arcsin(x^2-7x+6)=\arcsin(1-x)$; *б*) $(\arccos x)^2-7\arccos x+10=0$. *Решение.* *Ответ*: *а*) 1; *б*) cos2.

Расширение понятия предела

Виды пределов	Определения и свойства	Примеры применения
Односторонние пределы функции в точке  $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$  $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) =$ $= \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) =$ $= f(x_0)$	Число A называется **пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева,** если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любого x, удовлетворяющего условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется условие $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$. ***Обозначение.*** $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$. Число B называется **пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 справа,** если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любого x, удовлетворяющего условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется условие $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$. ***Обозначение.*** $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$. ***Замечание.*** Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. В этом случае оба односторонних предела равны $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.	*Исследуйте на непрерывность функцию* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}, & x \geq 2, \\ 2x^3 - 10x + 11, & x < 2. \end{cases}$ *Решение.* $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) =$ $f(2) =$
Бесконечные пределы функции в точке	**Функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к x_0 слева,** если для любого $C > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любого x, удовлетворяющего условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется условие $f(x_0) > C$.	*Найдите односторонние пределы функции* $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ *в точках −2 и 2. Изобразите схематически график функции в окрестности этих точек.*



$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

$x = x_0$ — вертикальная асимптота

Обозначение. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$.

Функция $f(x)$ стремится к $-\infty$ при x, стремящемся к x_0 справа, если для любого $C > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любого x, удовлетворяющего условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется условие $f(x_0) < -C$.

Обозначение. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$.

Замечания.

1) Аналогично определяются $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$.

2) Если оба односторонних предела в точке x_0 бесконечны, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Если один или оба односторонних предела бесконечны, то прямая $x = x_0$ – вертикальная асимптота графика данной функции.

3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, а $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

4) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

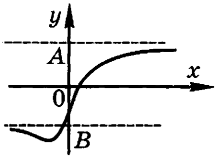
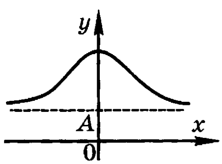
5) При вычислении пределов дробных функций, в которых числитель и знаменатель стремятся к нулю (неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$), обычно пытаются сократить данную дробь, применяя формулы сокращенного умножения или (для иррациональных выражений) домножение на сопряженный радикал. Например,

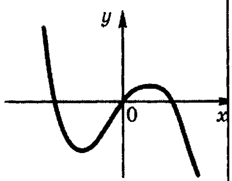
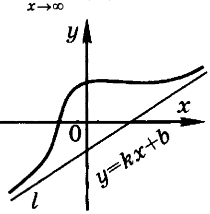
Решение.

Вычислите:

$$\lim_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

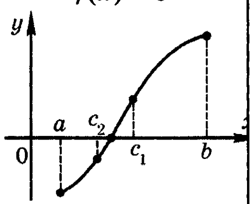
$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1} - 1}$$

	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6.$	
Пределы функции на бесконечности  $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$  $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ $\boldsymbol{y=A}$ **— горизонтальная асимптота**	**Функция** $\boldsymbol{f(x)}$ **стремится к** A **при** $\boldsymbol{x}$**, стремящемся к** $+\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $x_0>0$, такое, что для любого $x>x_0$ выполняется условие $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$. ***Обозначение.*** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. ***Замечания.*** 1) Аналогично определяется и обозначается предел функции при x, стремящемся к $-\infty$. 2) Если $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. Если один или оба предела на бесконечности равны A, то прямая y=A – горизонтальная асимптота графика данной функции. 3) Функция может не иметь предела на бесконечности. Например, не существует $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$. 4) При вычислении пределов на бесконечности дробно-рациональных функций, в которых числитель и знаменатель стремятся к бесконечности (неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$), обычно делят числитель и знаменатель на наибольшую степень переменной. Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+1}{2x^3+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{3}{x^2}}=$ $=2.$	*Вычислите*: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{3x^2-x+1}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$ *Найдите уравнение горизонтальной асимптоты графика функции* $y=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2+2x-1}$. *Ответ*: y=1.

	5) Если функция содержит иррациональные выражения (неопределенность типа $\infty - \infty$), часто используют домножение и деление на сопряженный радикал. Например, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0.$	*Вычислите*: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
Бесконечные пределы функции на бесконечности  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$  $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$ **l — наклонная асимптота**	**Функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к $-\infty$,** если для любого $C > 0$ найдется $x_0 < 0$, такое, что для любого $x < x_0$ выполняется условие $f(x) > C$. ***Обозначение.*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. ***Замечания.*** 1) Аналогично определяются и обозначаются предел функции при x, стремящемся к $-\infty$, равный $-\infty$, и бесконечные пределы функции при x, стремящемся к $+\infty$. 2) Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ бесконечны, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. 3) Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, но $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx) = b$, то прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота графика данной функции при $x \to \infty$. График дробно-рациональной функции имеет наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда степень числителя дроби на 1 больше степени знаменателя.	*Вычислите*: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{3x-8}$ *Найдите уравнение наклонной асимптоты графика функции* $y = \dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$. *Ответ*: $y=x$.

Типовое задание	*Найдите уравнения асимптот графиков функций:* *а)* $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$; *б)* $y = \dfrac{3x^2-2x+2}{x+5}$. ***Решение.*** *Ответ*: *а)* x=0,5; y=1,5; *б)* x=–5; y=3x–17. ***Замечание.*** Иногда наклонные асимптоты дробно-рациональных функций удобно найти делением числителя на знаменатель. Так, $f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x-3} = x+1+\dfrac{2}{x-3}$, откуда y=x+1 — наклонная асимптота.

Метод половинного деления

Метод половинного деления для вычисления приближенного значения корня уравнения $f(x)=0$ 	Если функция f непрерывна на $[a;b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то f имеет на $[a;b]$ хотя бы один корень. Для его приближенного нахождения используется **метод половинного деления.** 1) Найдем значение f в середине отрезка $[a;b]$: $f(c_1)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Если $f(c_1)=0$, то c_1 – искомый корень. 2) Если $f(c_1)\neq 0$, то $f(c_1)\cdot f(a)<0$ (или $f(c_1)\cdot f(b)<0$). Найдем значение f в середине c_2 отрезка $[a;c_1]$ (или $[c_1;b]$): Если $f(c_2)=0$, то c_2 – искомый корень. 3) Если $f(c_2)\neq 0$, то продолжаем процесс половинного деления до тех пор, пока длина последнего из рассматриваемых отрезков не станет меньше заданной погрешности ε. Тогда (если корень еще не найден), в качестве приближенного значения можно выбрать любой из концов последнего рассмотренного отрезка.
Полезное задание	*Используя калькулятор, найдите приближенное значение одного из корней уравнения* $x^4+x^3-5=0$. *Указание*: $1^4+1^3-5<0$, $2^4+2^3-5>0$.

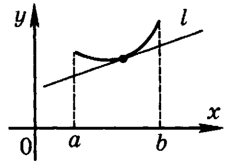
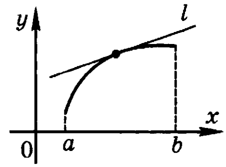
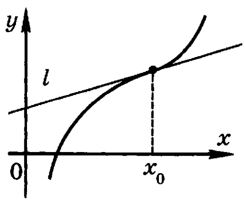
Производные аркфункций

Формула	Доказательство	Пример
$(\arcsin x)'=$ $=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\lvert x\rvert<1$	Рассмотрим функцию $y(x)=\arcsin x$, где $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sin y(x)=x$. Продифференцируем это равенство: $(\sin y(x))'=(x)'$; $\cos y(x)\cdot y'(x)=1$. Отсюда $y'(x)=\frac{1}{\cos y(x)}=$ $=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(x\arcsin x)'=$

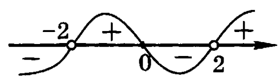
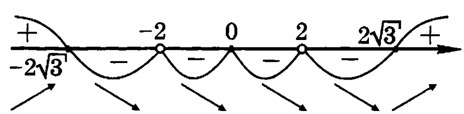
$(\arccos x)' =$ $= -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\lvert x\rvert < 1$	$(\arccos x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' =$ $= -(\arcsin x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	$(\arccos x^2)' =$
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	Рассмотрим функцию $y(x) = \operatorname{arctg} x$, где $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\operatorname{tg} y(x) = x$. Продифференцируем это равенство: $(\operatorname{tg} y(x))' = (x)'$; $\dfrac{1}{\cos^2 y(x)} \cdot y'(x) = 1$. Отсюда $y'(x) = \cos^2 y(x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y(x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$.	$(\operatorname{arctg}^2 x)' =$
$(\operatorname{arcctg} x)' =$ $= -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' =$ $= -(\operatorname{arctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$	$\left(\left(1+x^2\right)\operatorname{arcctg} x\right)' =$

Выпуклость и точки перегиба. Расширенная схема исследования функции

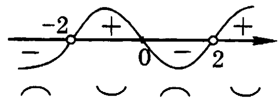
Выпуклость функций	Функция f, дифференцируемая на интервале $(a;b)$, называется **выпуклой вниз** на этом интервале, если ее график лежит выше касательной, проведенной к нему в любой точке интервала $(a;b)$.

  	Функция f, дифференцируемая на интервале $(a;b)$, называется **выпуклой вверх** на этом интервале, если ее график лежит ниже касательной, проведенной к нему в любой точке интервала $(a;b)$.
Точка перегиба  	Точка x_0 называется **точкой перегиба** графика функции f, если в этой точке кривая графика функции переходит с одной стороны касательной, проведенной к графику в точке $(x_0; f(x_0))$, на другую. Иными словами, в точке перегиба направление выпуклости графика меняется.
<u>Теорема</u> **(достаточное условие выпуклости функции)**	**Если функция f непрерывна на $[a;b]$ и в любой точке $x \in (a;b)$ $f''(x) > 0$, то функция f выпукла вниз на $(a;b)$.** **Если функция f непрерывна на $[a;b]$ и в любой точке $x \in (a;b)$ $f''(x) < 0$, то функция f выпукла вверх на $(a;b)$.** *Доказательство см. в учебнике Н.Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ–*10», *стр.*200.
<u>Теорема</u> **(достаточное условие точки перегиба)**	**Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, кроме, возможно, самой этой точки. Тогда если при переходе через x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 – точка перегиба графика функции f.** *Доказательство см. в учебнике Н.Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ–*10», *стр.* 203. ***Замечания.*** 1) В точке перегиба вторая производная функции равна нулю или не существует. 2) Обратное утверждение неверно: если $f''(x_0) = 0$, то x_0 не обязательно является точкой перегиба. Например, вторая производная функции $f(x) = x^4$ в точке 0 равна нулю, но эта точка не является точкой перегиба.

Типовое задание	***Найдите промежутки, на которых данная функция выпукла вверх (вниз) и точки перегиба графика функции*** $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 2x + 3$. ***Решение.*** ***Ответ***: **f выпукла вверх на $(-1;3)$; f выпукла вниз на $(-\infty;-1)$ и $(3;+\infty)$; -1 и 3 — точки перегиба.**

Расширенная схема исследования функции	
Этапы исследования	**Пример** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$
1. Область определения функции.	$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$
2. Четность, нечетность, периодичность.	$y(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 4} = -y(x)$. Данная функция нечетна. Данная функция не является периодической.
3. Точки пересечения с осями координат.	Нули функции: $\dfrac{x^3}{x^2 - 4} = 0$; $x = 0$. Точка пересечения с осями координат – $(0;0)$.
4. Промежутки знакопостоянства.	$y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$  $y(x) > 0$ при $x \in (-2;0) \cup (2;+\infty)$; $y(x) < 0$ при $x \in (-\infty;-2) \cup (0;2)$.
5. Промежутки монотонности, точки экстремума, экстремумы. **6. Промежутки выпуклости, точки перегиба.**	$y'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} =$ $= \dfrac{x^2\left(x + 2\sqrt{3}\right)\left(x - 2\sqrt{3}\right)}{(x^2 - 4)^2}$.  $y''(x) = \dfrac{\left(4x^3 - 24x\right)\left(x^2 - 4\right)^2 - \left(x^4 - 12x^2\right) \cdot 2\left(x^2 - 4\right) \cdot 2x}{\left(x^2 - 4\right)^4} =$ $= \dfrac{4x\left(x^2 - 4\right)\left(\left(x^2 - 6\right)\left(x^2 - 4\right) - x^4 + 12x^2\right)}{\left(x^2 - 4\right)^4} =$

$$=\frac{4x\left(x^4-6x^2-4x^2+24-x^4+12x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$



0 – точка перегиба.

x	$\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$	$-2\sqrt{3}$	$\left(-2\sqrt{3};-2\right)$	$(-2;0)$	0
$y'(x)$	+	0	–	–	0
$y''(x)$	–		–	+	0
$y(x)$	$\uparrow,\cap$	$-3\sqrt{3}$	$\downarrow,\cap$	$\downarrow,\cup$	0
		max			*пер.*

x	$(0;2)$	$\left(2;2\sqrt{3}\right)$	$2\sqrt{3}$	$\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$
$y'(x)$	–	–	0	+
$y''(x)$	–	+		+
$y(x)$	$\downarrow,\cap$	$\downarrow,\cup$	$3\sqrt{3}$	$\uparrow,\cup$
			min	

7. Непрерывность, точки разрыва.

Функция непрерывна при $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.
-2 и 2 – точки разрыва.

8. Асимптоты.

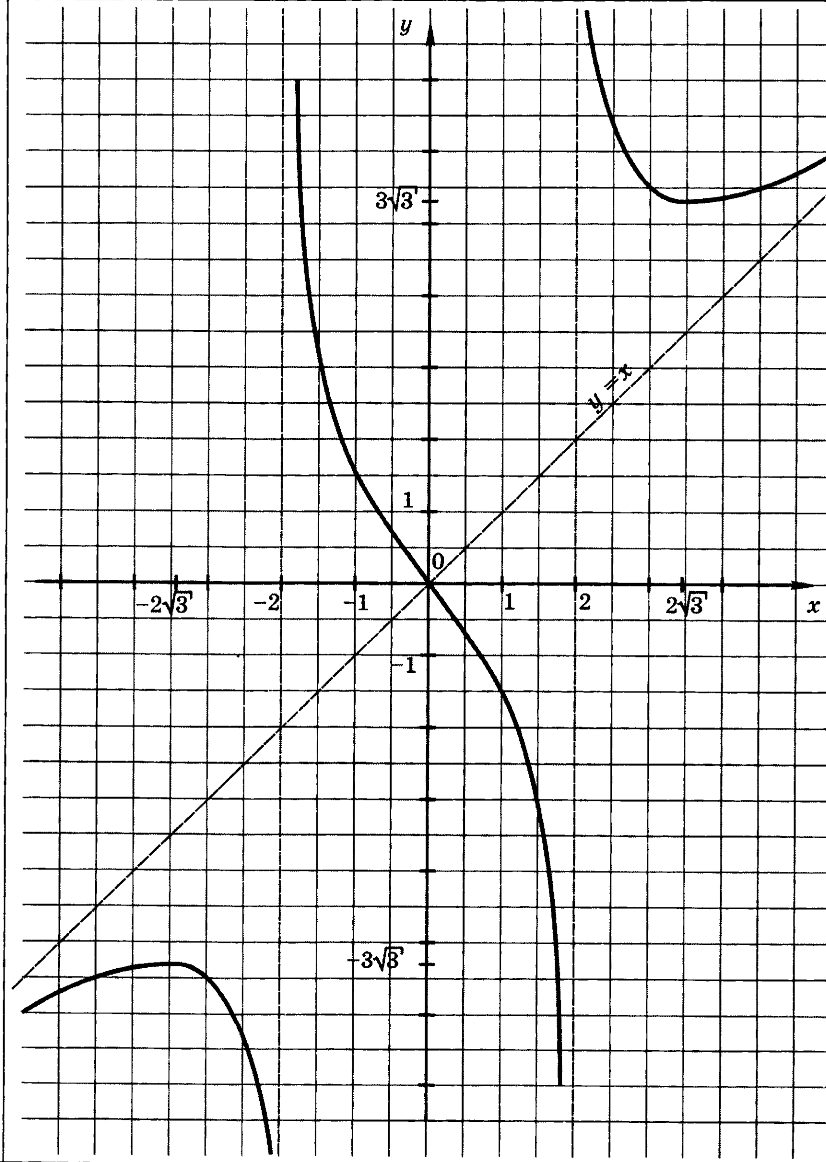
$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty;\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty;$$

$x=-2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty;\quad \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty;$$

$x=2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1=k;$$

	$$\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0=b\,.$$ $y = x$ – наклонная асимптота.
9. Эскиз графика функции.	
10. Область значений функции.	$E(y) = \boldsymbol{R}$

Типовое задание	*Исследуйте функцию* $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{x}$ *и постройте ее график.* ***Решение.***

Полезное задание	***Построив соответствующий график, определите, сколько корней имеет уравнение*** $\frac{8\cdot(x^3+x)}{(2x+1)^3}=a$ ***в зависимости от значений параметра а.***

Дополнительные сведения и задачи

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ершова Алла Петровна
Голобородько Вадим Владимирович
Крижановский Александр Феликсович

Тетрадь-конспект по алгебре и началам анализа для 10 класса

Оформление обложки *А.А. Андреев*
Ответственный за выпуск *К.П. Бондаренко*
Компьютерная верстка *С.И. Удалов*

Подписано в печать 19.09.2013. Формат 70×90/16.
Усл.-печ. л. 10,53. Тираж 3000 экз.

Отпечатано в рекламно-имиджевой компании «ПолиГрафГруп»
127106, г. Москва, ул. Гостиничная, д. 9А, кор. 3
Тел.: (495) 984-77-98

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67